# MATEMÁTICA

PROCESSO AUTO INSTRUTIVO

MANUAL DO PROFESSOR

# PAI

2 SÉRIE

SCIPIONE e CÉLIA

SCIPIONE DI PIERRO NETTO

- Doutor em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.
- Professor de Prática de Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo e da Universidade Católica de São Paulo.
- Professor Titular de Matemática do Ex Colégio de Aplicação da Universidade de São Paulo.
- Professor Efetivo de Matemática do Magistério Oficial do Estado de São Paulo.

CÉLIA CONTIN GOES

- Mestre em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística de São Paulo.
- Professora Contratada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.
- Professora Titular de Matemática do Ex Colégio de Aplicação da Universidade de São Paulo.
- Professora Efetiva de Matemática do Magistério Oficial do Estado de São Paulo.

**PRODUÇÃO EDITORIAL**

MÓDULOS – AUTORIA CRIATIVIDADE E
ORIENTAÇÃO PEDAGÓGICA EM MATEMÁTICA – S/C – LTDA

CAPA
ANA MARIA ROSSI
E
NELSON YAMAGA

Este livro foi composto
por
NOBUO YAMASHITA

Diagramação, Ilustração e
Arte Final
GETÚLIO H. TANAKA
MÁRIO KODAIRA

FICHA CATALOGRÁFICA

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte,
Câmara Brasileira do Livro, SP)

Di Pierro Netto, Scipione,

D63ma
2º
2º grau

Matemática, processo auto-instrutivo, PAI-2: 2ª série, 2º grau [por] Scipione Di Pierro Netto [e] Célia Contin Goes. São Paulo, Scipione Autores Ed., 1978

212 p. ilust.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.

1. Matemática (2º grau) I. Goes, Célia Contin. II. Título. III. Título: PAI-2.

76-0005 CDD-510

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

**1978**



**SCIPIONE AUTORES EDITORES LTDA**

R. Princesa Leopoldina, 431/445
CEP 05081 — Alto da Lapa
Tels.: 260-5878 e 261-2902
São Paulo, S.P.

Impresso no Brasil
*Printed in Brazil*

SCIPIONE DI PIERRO NETTO
CÉLIA CONTIN GOES

PAI²

2ª série
2º GRAU

# Matemática

## Processo Auto-Instrutivo

# Apresentação

Neste segundo volume, damos seqüência, dentro da mesma ordem de idéias ao trabalho iniciado na 1ª série. Procuramos respeitar a graduação dos trabalhos destinados ao **FAÇA VOCÊ**, de forma a possibilitar a maior independência possível do aluno em relação ao trabalho expositivo do professor.

São 67 sequências de **FAÇA VOCÊ** e 40 sequências de **EXERCÍCIOS DE REVISÃO**. Pensamos com esse trabalho que representa um montante superior a 2.000 exercícios, proporcionar a base indispensável para um curso de 2º grau simples, accessível, porém sério.

Desejamos apresentar uma sugestão aos colegas do magistério e um desafio aos alunos: tendo aprendido a manejar o livro nos primeiros capítulos, tente aprender sozinho um capítulo intermediário: **Probabilidades**, por exemplo ou então **Combinatória** e **Probabilidades**. Avalie que resultados conseguiu obter sozinho.

Será uma forma eficiente para aprender a aprender, isto é, aprender a estudar e progredir com recursos próprios. Escreva-nos dizendo os resultados. Conte também as dificuldades. Nós responderemos sempre.

Agradecemos aos colegas as críticas construtivas.

Os Autores.

R. Princesa Leopoldina, 431/445
CEP 05081 — Alto da Lapa
Tels.: 260-5878 e 261-2902
São Paulo, S.P.

# Índice

## CAPÍTULO 5 – PROBABILIDADES



## CAPÍTULO 6 – MATRIZES E DETERMINANTES



## CAPÍTULO 7 – SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES



## CAPÍTULO 8 – GEOMETRIA

# O PRINCIPIO DE INDUÇÃO FINITA

## 1. INDUÇÃO VULGAR E INDUÇÃO MATEMÁTICA

Quando se estudam alguns casos particulares de um evento qualquer e, dos resultados obtidos, deseja-se tirar uma regra geral, dizemos que se está fazendo indução. Toda a questão reside no fato de que á indução feita seja verdadeira ou falsa. Existem dois tipos de indução: uma é a **indução vulgar** e outra é a **indução matemática.** A primeira não tem base científica e pode conduzir a regras verdadeiras ou falsas; por exemplo: *na sala de aula o aluno número 1 é corintiano; o número 2 é corintiano; o número 3 é corintiano e então se conclui:* **todos os alunos da classe são corintianos.** Isto é uma indução vulgar e pode ser verdadeira ou falsa; nada nos assegura que seja verdadeira.

Outro exemplo é devido a **Euler**: a expressão $y = x^2 + x + 41$ para $x \in N$, parece fornecer apenas números primos; ora:

$$\text{para } x = 0 \Longrightarrow y = 41 \quad (V)$$
$$x = 1 \Longrightarrow y = 1^2 + 1 + 41 = 43 \quad (V)$$
$$x = 2 \Longrightarrow y = 2^2 + 2 + 41 = 47 \quad (V)$$

e continua a ser verdade até $x = 39$; entretanto, quando $x = 40$ ocorre:

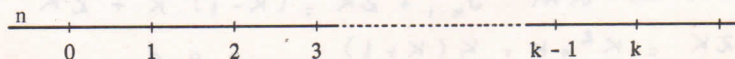
$$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41(40 + 1) = 41 \cdot 41$$

que é múltiplo de 41, e então, a **propriedade é falsa.**

Por aí se vê que são necessários critérios mais seguros para se garantir a veracidade de uma indução. Esses critérios são fornecidos pela **Indução Matemática** que também se chama habitualmente **Indução Completa** ou **Indução Finita** e constitue-se no seguinte.

Dada uma propriedade que representaremos por P(n), isto é, que depende de um número natural *n*, afirmaremos que P(n) é verdadeira qualquer que seja o natural *n* se se verificarem as duas seguintes condições:

1.º) **Comprova-se que** P(n) é verdadeira para $n = 0, 1, 2, \ldots$, isto é, para os primeiros valores do conjunto N.
2.º) **Admite-se que** P(n) seja válida para $n = k - 1$ e desse fato **prova-se** que P(n) vale para $n = k$.

Observemos que o fato de se admitir P(n) válida para $n = k - 1$, isto é a **hipótese de indução,** dá generalidade ao problema, pois se se consegue provar que P(k) é verdadeira a partir de admitir-se P(k − 1) como verdadeira, deve-se notar que na sucessão dos naturais,

k − 1 pode ocupar qualquer posição, inclusive uma daquelas iniciais (0, 1, 2, . . . ) que a primeira condição **comprovou.**

*1.º Exemplo:* **A soma dos primeiros 10 números ímpares é $10^2$.**

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & = 1 = 1^2 \\ 1 + 3 & = 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 & = 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 & = 16 = 4^2 \\ 1 + 3 + \ldots\ldots + 19 & = 100 = 10^2 \end{array}\right\}$$

**Isto é comprovável por verificação direta.**

**Todavia se desejássemos uma generalização, isto é:**

*2.º Exemplo:* **A soma dos n primeiros números ímpares é $n^2$.**

Ou seja: $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in N^*$ **teríamos que fazer:**

*1ª Condição:* **Comprovar que P(n) é verdadeira para n = 1, 2, ..........**

Para $n = 1 \Longrightarrow \quad 1 = 1 = 1^2$ (V)

$n = 2 \Longrightarrow \quad 1 + 3 = 4 = 2^2$ (V)

*2ª Condição:* **Admitir** P(n) verdadeira para $n = k - 1$ **e provar** que P(n) vale para $n = k$.

Se P(n) vale para $n = k - 1$ $\Big\}$ $1 + 3 + \ldots\ldots + [2(k - 1) - 1] = (k - 1)^2$

**adicionando-se o k-ésimo termo a ambos os membros resulta:**

$$1 + 3 + \ldots\ldots + 2(k - 1) - 1 + \underbrace{2k - 1} = (k - 1)^2 + \underbrace{2k - 1}$$

vem $\quad 1 + 3 + \ldots\ldots + 2k - 1 = k^2 - 2k + 1 + 2k - 1$

ou $\quad 1 + 3 + \ldots\ldots + 2k - 1 = k^2$ **o que prova a propriedade.**

## 1.1. FAÇA VOCÊ – TAREFA 1

1. Prove que a soma dos n primeiros números naturais é dada por $S_n = \frac{n(n + 1)}{2}, \quad \forall n \in N.$

**a) Comprove para:**

$n = 0 \Longrightarrow S_0 = \frac{0.(0+1)}{2} = 0 \quad (V)$

$n = 1 \Longrightarrow S_1 = \frac{1.(1+1)}{2} = 1 \quad (V)$

**b) Admita** que $S_{k-1}$ seja verdadeira e **prove** que $S_k$ é verdadeira. (Sugestão: adicione membro a membro o k-ésimo termo da soma).

Se P(K-1) é verdadeira $\Longrightarrow S(K-1) = \frac{(K-1).K}{2}$ e adicionando-se o K-ésimo termo aos membros, vem:

$S_{K-1} + K = \frac{(K-1).K}{2} + K = \frac{K^2 - K + 2K}{2} = \frac{K^2 + K}{2}$ ou:

$S_K = \frac{K(K+1)}{2}$, o que prova a propriedade.

2. Prove que a soma dos n primeiros números pares é dada por $S_n = n(n + 1), \quad \forall n \in N.$

**a) Comprove para:**

$n = 0 \Longrightarrow 0(0+1) = 0 \Longrightarrow (V)$ pois $0 = 0$

$n = 1 \Longrightarrow 1(1+1) = 2 \Longrightarrow (V)$, pois $0 + 2 = 2$

**b) Admita** que $S_{k-1}$ seja verdadeira e **prove** que $S_k$ também o é:

Se P(K-1) é verdadeira $\Longrightarrow S_{K-1} = (K-1).K$ e adicionando-se o K-ésimo termo aos membros vem: $S_{K-1} + 2K = (K-1).K + 2K$

$S_K = K^2 - K + 2K = K^2 + K = K(K+1)$, c.q.d.

3. Prove que $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n} < 2, \quad \forall n \in N.$

a) **Comprove** para:

$n = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2^0} = 1 < 2 \quad (V)$

$n = 1 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{2^1} = \frac{3}{2} < 2 \quad (V)$

b) **Admita** que $S_{k-1}$ seja verdadeira e **prove** que $S_k$ também o é:

Se $P(k-1)$ é verdadeira $\Longrightarrow$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} < 2$ e multiplicando-se ambos os membros por $\frac{1}{2}$ vem: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^k} < 1$. Somando-se 1 a ambos os membros temos que: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} < 2$, o que prova a propriedade.

4. Prove que $n^2 + n$ é divisível por 2.

a) **Comprove** para:

$n = 0 \Longrightarrow n^2 + n = 0 = 2 \cdot 0 \quad (V)$

$n = 1 \Longrightarrow 1^2 + 1 = 2 = 2 \cdot 1 \quad (V)$

b) **Admita** que $P(k-1)$ seja verdadeira e **prove** que para $P(k)$ também é verdadeira:

$n^2 + n$ divisível por 2 $\Longleftrightarrow n^2 + n = 2 \cdot A$

Se $P(k-1)$ é verdadeira $\Longrightarrow (k-1)^2 + (k-1) = 2 \cdot B \Longrightarrow k^2 - k = 2 \cdot B$. Somando-se $2k$ a ambos os membros temos: $k^2 - k + 2k = 2B + 2k \Longrightarrow K^2 + K = 2(B + K)$ o que prova a propriedade.

## 2. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### SEQUÊNCIA 1

1. Demonstrar, pelo princípio de indução finita, que são verdadeira as seguintes igualdades, para $n \in N^*$

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

e) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$

f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots\ldots\ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

g) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

h) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \ldots\ldots\ldots (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

2. Prove pelo P.I.F. que:

a) $n^3 + 2n$ é divisível por 3, $\forall n \in N$.

b) $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6, $\forall n \in N$.

c) $3^{2n} - 1$ é divisível por 8, $\forall n \in N$.

# SEQUÊNCIAS AS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

## 3. SEQUÊNCIAS REAIS

### 3.1. DEFINIÇÃO

*Chama-se* **sequência real** *à toda aplicação ou função cujo domínio é* **N*** *e cujos valores estão em* **R.**

Seja o exemplo:

f: N* ⟶ R

n ⟼ y = 2n que fornece o conjunto {(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), . . . }

Ora, como os **primeiros elementos** dos pares ordenados obtidos serão sempre os naturais 1, 2, 3, 4, . . . poder-se-á omití-los; é o que se faz habitualmente e o conjunto

{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), . . . }

passa a ser representado apenas pelos segundos elementos:

(2, 4, 6, 8, . . . , 2n, . . . )

isto é, pelos elementos que são **imagens da aplicação** f, entre dois parênteses, o que indica que o **conjunto é ordenado.**

Outro exemplo:

f: N* ⟶ R

n ⟶ y = 2n + 3, resulta o conjunto {(1, 5), (2, 7), (3, 9), . . . }

que se representa simplesmente por ( ..5.. , ..7.. , ..9.. , . . . )

### 3.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 2

1. Determine as sequências definidas pelas sentenças que estão simbolizadas a seguir:

a) f: N* ⟶ R

n ⟼ y = 2n − 1

{(1 , 1 ), ( 2, 3 ), ( 3, 5 ), . . . }

ou ( 1 , 3 , 5 , . . . )

b) f: N* ⟶ R

n ⟼ $y = n^2 - 1$

{( 1 , 0 ), ( 2 , 3 ), ( 3, 8 ), . . . }

ou ( 0 , 3 , 8 , . . . )

c) $f: N^* \longrightarrow R$

$n \longmapsto y = \frac{n(n+1)}{2}$

$\{(1, 1), (2, 3), (3, 6), \ldots\}$

ou $(1, 3, 6, \ldots)$

d) $f: N^* \longrightarrow R$

$n \longmapsto y = \frac{n-2}{n}$

$\{(1, -1), (2, 0), (3, 1/3), \ldots\}$

ou $(-1, 0, 1/3, \ldots)$

2. Represente apenas pelo conjunto imagem ordenado, as sequências:

a) $f: N^* \longrightarrow R$

$n \longmapsto 3n - 1$

$(2, 5, 8, \ldots)$

b) $f: N^* \longrightarrow R$

$n \longmapsto y = \frac{1}{n}$

$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$

c) $f: N^* \longrightarrow R$

$n \longmapsto \frac{n}{n+1}$

$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$

d) $f: N^* \longrightarrow R$

$n \longmapsto 1 - n$

$(0, -1, -2, \ldots)$

### 3.3. NOTAÇÕES

Costuma-se indicar as sequências de modo abreviado que explicita apenas a lei de formação de seus termos, já que se sabe que se trata sempre de uma aplicação de $N^*$ em $R$. Assim:

a) $f: N^* \longrightarrow R$

$n \longmapsto y = \frac{2n}{n+1}$ indica-se: $(a_n)_{n \in N^*}$ e $a_n = \frac{2n}{n+1}$

b) $f: N^* \longrightarrow R$

$n \longmapsto y = (-1)^n + n$ indica-se: $(a_n)_{n \in N^*}$ e $a_n = (-1)^n + n$.

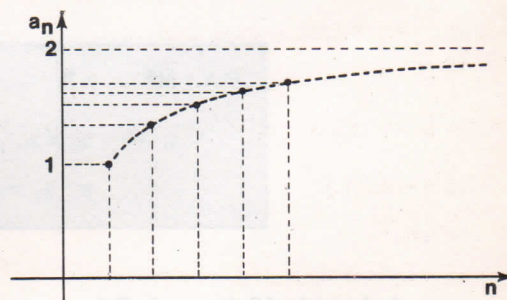
Também, por questão de simplicidade indica-se apenas a lei de formação, ou seja:

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$ e b) $a_n = (-1)^n + n$

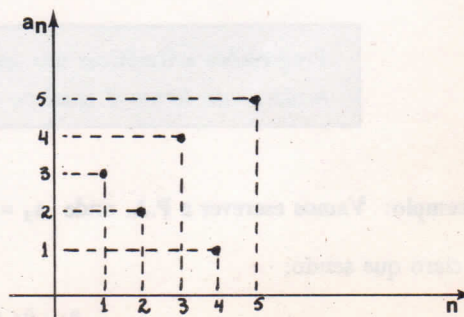
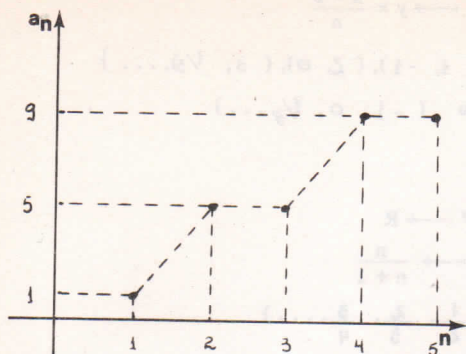
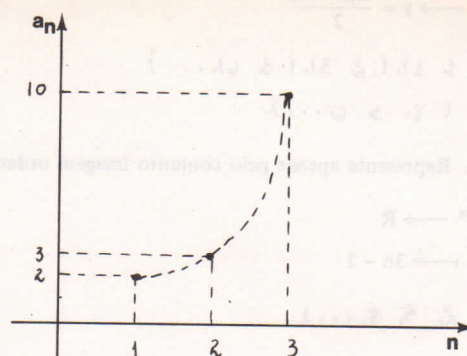
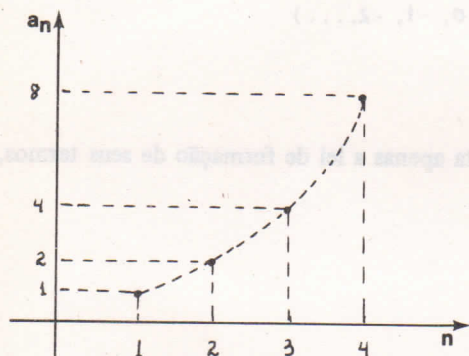
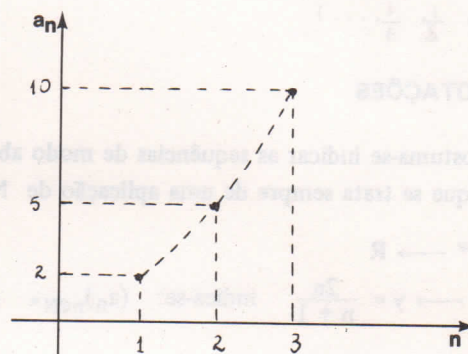
### 3.4. REPRESENTAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA EM R×R

Os elementos de uma sequência podem ser levados ao R×R e fornecer um conjunto isolado de pontos. Assim, o exemplo de f definido por

$$a_n = \frac{2n}{n+1} \quad \text{ou}$$

$$f = \{(1, 1), (2, \tfrac{4}{3}), (3, \tfrac{3}{2}), (4, \tfrac{8}{5}), \ldots\}$$

### 3.5. FAÇA VOCÊ – TAREFA 3

Represente em R×R

a) $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$

b) $a_n = 2n + (-1)^n$

c) $a_n = 2 + (n - 1)^3$

d) $a_n = 2^{n-1}$

e) $a_n = 1 + n^2$

## 4. SEQUÊNCIAS OU PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

As progressões aritméticas ou P.A. são sequências especiais, também definidas como aplicações de **N*** em **R**, como segue:

$$\text{P.A.: } \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$n \longmapsto a_n = a_{n-1} + r \qquad \text{com} \begin{cases} a \in \mathbf{R} \\ \text{e} \\ r \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$$\text{e} \quad a_1 = a$$

$a_1 = a$ é chamado 1º termo da P.A.

$r$ é chamado razão da P.A.

**Progressões aritméticas** *são sequências tais, onde, dados o primeiro termo e a razão, cada termo é igual ao anterior adicionado da razão.*

**Exemplo:** **Vamos escrever a P.A. onde $a_3 = 12$ e $r = 5$**

É claro que sendo:

$$: a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_n \ldots$$

a forma usual de representar-se uma P.A. teremos:

$$: (a_3 - 2r) \cdot (a_3 - r) \cdot a_3 \cdot (a_3 + r)$$

ou

$$: 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 17 \cdot 19 \ldots\ldots$$

Esta notação é tradicional. Usa-se esta, ou então, a que apresentamos antes:

$$P.A. = (2, 7, 12, 17, 19, \ldots\ldots)$$

## 4.1. FAÇA VOCÊ – TAREFA 4

Escreva os termos das P.A. dadas pela sua lei de recorrência ou de formação:

a) $\begin{cases} a_5 = 19 \\ a_n = a_{n-1} + 7 \end{cases}$ P.A. = ( -9, -2, 5, 12, 19, 26, .... )

b) $\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4} \end{cases}$ P.A. = ( $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, .... )

c) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2} \end{cases}$ P.A. = ( 0, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, -2, .... )

d) $\begin{cases} a_8 = -20 \\ a_n = a_{n-1} - 5 \end{cases}$ P.A. = ( 15, 10, 5, 0, -5, -10, -15, -20, .... )

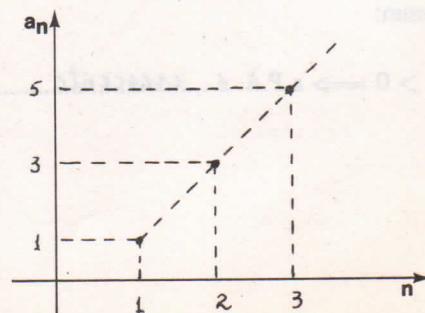
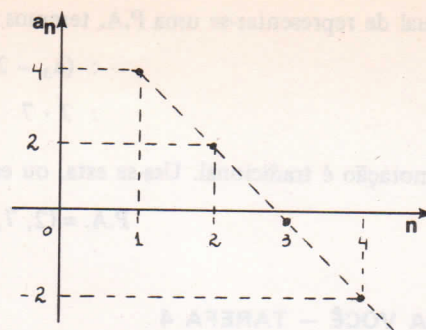
e) $\begin{cases} a_3 = -1 \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} \end{cases}$ P.A. = ( -2, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, .... )

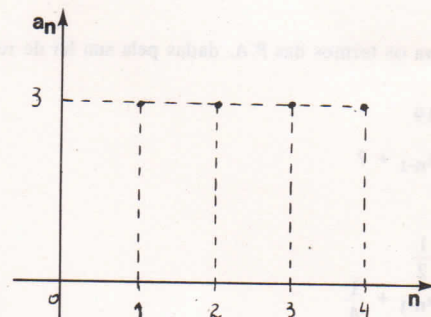
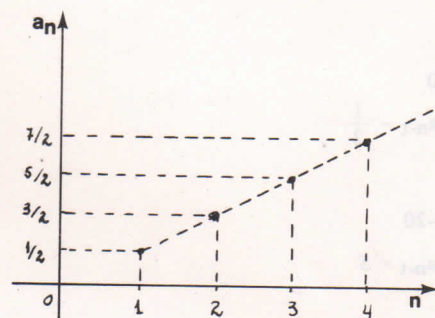
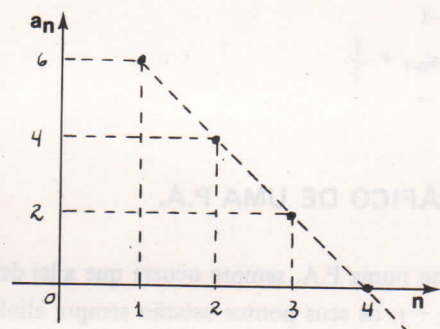
# 5. GRÁFICO DE UMA P.A.

Como numa P.A. sempre ocorre que a lei de recorrência é linear, isto é, é do tipo $a_n = a_{n-1} + r$ que se identifica como $y = x + r$, os seus pontos estarão sempre alinhados, embora isolados.

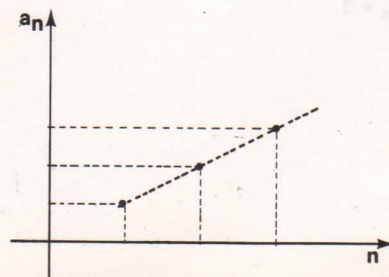
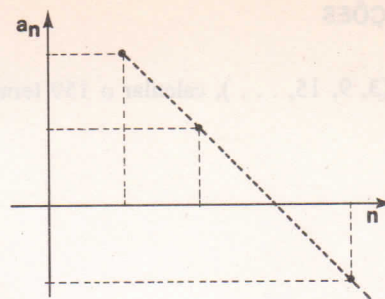
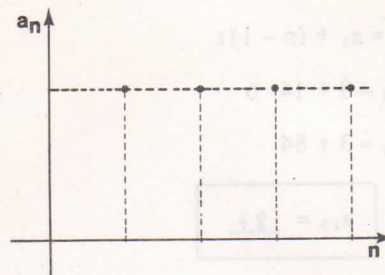
## 5.1. FAÇA VOCÊ – TAREFA 5

Represente nos gráficos indicados as P.A. definidas pela sua lei de recorrência:

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$

c) 

$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n + 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$

## 5.2. CLASSIFICAÇÃO DAS P.A.

Pelos gráficos anteriores você pode concluir que o ......*sinal*...... da razão r identifica o crescimento da P.A.; assim:

Se $r > 0 \Longrightarrow$ a P.A. é ......*crescente*......

Se $r < 0 \Longrightarrow$ a P.A. é ......decrescente..........

Se $r = 0 \Longrightarrow$ a P.A. é ......constante..........

## 6. TERMO GERAL DE UMA P.A.

Vamos obter a fórmula do termo geral $a_n$, de uma P.A., em função do primeiro termo $a_1$ e da razão $r$.

**POR INDUÇÃO SIMPLES**

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_2 + r$
... ..........
... ..........
... ..........
$a_n = a_{n-1} + r$

Adicionando-se membro a membro as n parcelas, obteremos:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n =$$
$$= a_1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + (n-1) \cdot r$$

cancelando-se os termos iguais, vem:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

**POR INDUÇÃO MATEMÁTICA**

Teorema: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Prova:

*1ª Condição:* **Comprova-se para** $n = 1$

$a_1 = a_1 + (1-1)r$ ou
$a_1 = a_1 + 0 \cdot r$ ou
$a_1 = a_1$ (verdadeiro)

*2ª Condição:* **Admite-se, por hipótese que o teorema seja verdadeiro para** $n = k - 1$ **e prova-se para** $n = k$.

$$n = k - 1 \Longrightarrow a_{k-1} = a_1 + (k-2) \cdot r$$

como $a_k = a_{k-1} + r$, basta adicionar $r$ aos membros:

$$\underbrace{a_{k-1} + r} = a_1 + (k-2) \cdot r + r$$
$$a_k = a_1 + (k - 2 + 1) \cdot r \quad \text{ou}$$
$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$$

Logo

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \quad \forall n \in N^*$$

Observação: A indução matemática confere validade à fórmula obtida pela indução vulgar.

### 6.1. APLICAÇÕES

a) Na P.A. = (3, 9, 15, . . . ), calcular o 15º termo.

$a_1 =$ 3

$r =$ 6

$n =$ 15

$a_{15} = ?$

Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{15} = 3 + 14 \cdot 6$

ou $a_{15} = 3 + 84$

donde $a_{15} =$ 87

b) Determinar quantos múltiplos de 7 existem entre 100 e 1000.

P.A. = (105, . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . , 994)

105 é o 1º múltiplo de 7 maior que 100 e 994 é o último múltiplo de 7 menor que 1000.

$a_1 =$ 105

$a_n =$ 994

$r =$ 7

$n = ?$

Como $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_n - a_1 = (n - 1) \cdot r$

$\frac{a_n - a_1}{r} = n - 1$

ou $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$

donde $n = \frac{994 - 105}{7} + 1 = 128$

Logo $n = 128$

### 6.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 6

1. Determine o termo indicado em cada uma das P.A. seguintes:

a) (3, 11, . . . . . ); $a_{10}$

$a_1 =$ 3

$r =$ 8

$n =$ 10

$a_{10} = ?$

Como: $a_n = a_1 + (n-1).r$

vem: $a_{10} = 3 + 9.8$

ou: $a_{10} = 3 + 72$

logo: $a_{10} = 75$

b) (8, 5, . . . . . ); $a_{31}$

$a_1 =$ 8

$r =$ -3

$n =$ 31

$a_{31} = ?$

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_{31} = 8 + 30.(-3)$

$a_{31} = 8 - 90$

logo: $a_{31} = -82$

c) $(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, . . . . . );$ $a_{12}$

$a_1 =$ 1/4

$r =$ 5/8

$n =$ 12

$a_{12} = ?$

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_{12} = \frac{1}{4} + 11 \cdot \frac{5}{8}$

$a_{12} = \frac{1}{4} + \frac{55}{8}$

logo $a_{12} = \frac{57}{8}$

d) (3, 7, . . . . . ); $a_{200}$

$a_1 =$ 3

$r =$ 4

$n =$ 200

$a_{200} = ?$

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_{200} = 3 + 199 . 4$

$a_{200} = 3 + 796$

logo: $a_{200} = 799$

2. Calcule n nos seguintes casos:

a) (2, 4, 6, . . . , $a_n$, . . . ) sendo $a_n = 46$.

$a_1 =$ 2

$r =$ 2

$a_n =$ 46

$n = ?$

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$\Longleftrightarrow n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$

$n = \frac{46 - 2}{2} + 1$

logo: $n = 23$

b) (50, 47, 44, . . . , $a_n$, . . . ) sendo $a_n = 14$.

$a_1 =$ 50

$r =$ -3

$a_n =$ 14

$n = ?$

$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$

$n = \frac{14 - 50}{-3} + 1$

$n = \frac{-36}{-3} + 1$

logo: $n = 13$

c) (2,7; 3,2; . . . ; $a_n$; . . . ) e $a_n = 17,7$.

$a_1 = 2,7$

$r = 0,5$

$a_n = 17,7$

$n = ?$

$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$

$n = \frac{17,7 - 2,7}{0,5} + 1$

$n = 30 + 1$

logo: $n = 31$

d) $(6\frac{1}{4}, 7\frac{1}{2}, \ldots, a_n, \ldots)$ e $a_n = 31\frac{1}{4}$

$a_1 = \frac{25}{4}$

$r = \frac{5}{4}$

$a_n = \frac{125}{4}$

$n = ?$

$n = \frac{a_n - a}{r} + 1$

$n = \frac{\frac{125}{4} - \frac{25}{4}}{\frac{5}{4}} + 1$

$n = 20 + 1$

logo $n = 21$

## 7. PROPRIEDADES DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

As seguintes propriedades são características das P.A. e de demonstração simples, como se verá.

### 7.1. PRIMEIRA PROPRIEDADE:

*Dados três termos consecutivos de uma P.A. o termo médio é média aritmética dos outros dois.*

De fato; na P.A. = $(a_1, a_2, \ldots, \underbrace{a_{p-1}, a_p, a_{p+1}}, \ldots, a_n, \ldots)$

pela definição $a_p = a_{p-1} + r$ e $a_p = a_{p+1} - r$ } adicionando-se membro a membro vem:

$$2\,a_p = a_{p-1} + a_{p+1} \quad \text{ou} \quad a_p = \frac{a_{p-1} + a_{p+1}}{2}$$

### 7.2. SEGUNDA PROPRIEDADE:

*Em toda P.A. a soma de dois termos quaisquer, $a_n$ e $a_m$, é igual a soma de dois outros termos quaisquer, equidistantes deles.*

De fato; na P.A. = $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+k}, \ldots, a_{m-k}, \ldots, a_m, \ldots)$ $a_{n+k}$ e $a_{m-k}$ são respectivamente equidistantes a $a_n$ e $a_m$ (existem k-1 termos entre eles).

Como: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ e $a_m = a_1 + (m-1) \cdot r$ } adicionando membro a membro, vem:

$$a_n + a_m = a_1 + (n-1) \cdot r + a_1 + (m-1) \cdot r$$

se somarmos e subtrairmos kr, temos:

$$a_n + a_m = a_1 + (n-1) \cdot r + a_1 + (m-1) \cdot r + kr - kr$$

$$a_n + a_m = a_1 + [(n+k) - 1] \cdot r + a_1 + [(m-k) - 1] \cdot r$$

logo:

$$a_n + a_m = a_{n+k} + a_{m-k}$$

## 8. SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A.

Deseja-se a soma dos n primeiros termos da

$$P.A. = (a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}, \ldots, a_{n-p}, \ldots, a_n, \ldots)$$

ou $$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p+1} + \ldots + a_{n-p} + \ldots + a_n$$

ou $$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-p} + \ldots + a_{p+1} + \ldots + a_1,$$ pois a adição é comutativa.

Adicionando-se membro a membro, vem:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{p+1} + a_{n-p}) + \ldots + (a_n + a_1)$$

onde temos a soma de n parênteses todos iguais a $(a_1 + a_n)$ pela propriedade 7.2 ; então:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \text{ou} \quad \boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

### 8.1. FÓRMULA DERIVADA DA SOMA

Da fórmula $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ e do fato que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, tiramos que:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot r}{2}$$

ou $$\boxed{S_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot r}{2}}$$ que é uma fórmula conveniente para muitos problemas.

### 8.2. FAÇA VOCÊ — TAREFA 7

1. Determine a soma $S_n$ dos termos das seguintes P.A.:

a) $(1, 3, 5, \ldots, a_n, \ldots)$ e $a_n = 101$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$101 = 1 + (n-1) \cdot 2 \iff n = \frac{101 - 1 + 2}{2}$

logo: $n = 51$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Longrightarrow S_n = \frac{1 + 101}{2} \cdot 51 \iff \boxed{S_n = 2601}$

b) $(2, 7, 12, \ldots, a_n, \ldots)$ e $a_n = 77$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$77 = 2 + (n-1) \cdot 5 \iff n = \frac{77 - 2 + 5}{5}$

logo: $n = 16$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Longrightarrow S_n = \frac{2 + 77}{2} \cdot 16 \iff \boxed{S_n = 632}$

c) $(x, 3x, 5x, \ldots, a_n, \ldots)$ e $a_n = 21x$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$21x = x + (n-1) \cdot 2x \iff n = \frac{21x - x + 2x}{2x}$$

logo: $n = 11x$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \iff S_n = \frac{x + 21x}{2} \cdot 11x \iff \boxed{S_n = 121\, x^2}$$

d) $(x, x+1, \ldots, a_n, \ldots)$ e $a_n = x + n - 1$

$r = 1$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{, logo:}$$

$$S_n = \frac{x + x + n - 1}{2} \cdot n \iff \boxed{S_n = n \cdot x + \frac{n^2 - n}{2}}$$

e) $(15, 13, \ldots, a_{20}, \ldots)$

$$S_n = n\, a_1 + \frac{n(n-1)\, r}{2} \quad \text{(fórmula derivada da soma)}$$

$$S_n = 20 \cdot 15 + \frac{20 \cdot 19 \cdot (-2)}{2} \iff \boxed{S_n = -80}$$

f) $(20, 13, \ldots, a_{16}, \ldots)$

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1) \cdot r}{2}$$

$$S_n = 16 \cdot 20 + \frac{16 \cdot 15 \cdot 7}{2} \iff \boxed{S_n = 1160}$$

2. Inserir 4 meios aritméticos entre 15 e 30; ou seja, completar a P.A. = (15, , , , , 30, . . . ).

$a_1 = 15$

$a_6 = 30$

$n = 6$

$r = ?$

O problema reduz-se ao cálculo da razão r.

Como: $a_n = a_1 + (n-1)\, r \iff a_n - a_1 = (n-1) \cdot r \iff r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ ;

logo $r = \frac{30 - 15}{6 - 1} \iff r = 3$

e a P.A. = (15, 18, 21, 24, 27, 30, . . . )

3. Inserir tantos meios aritméticos quantos se pedem em cada caso, entre $a_1$ e $a_n$ que são dados:

a) 104 meios aritméticos entre $\frac{7}{8}$ e 14.

b) 4 meios aritméticos entre 1,2 e 11,2.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \iff r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

logo: $$r = \frac{11,2 - 1,2}{6-1} \iff \boxed{r = 2}$$

P.A. = (1,2 ; 3,2 ; 5,2 ; 7,2 ; 9,2 ; 11,2 ; ....)

c) 5 meios aritméticos entre 30x e 54x.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \iff r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

logo: $$r = \frac{54x - 30x}{7-1} \iff \boxed{r = 4x}$$

P.A. = (30x , 34x , 38x , 42x , 46x , 50x , 54x , ....)

d) p meios aritméticos entre 2p + 3 e 6p + 7.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \iff r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

logo: $$r = \frac{6p + 7 - 2p - 3}{p + 2 - 1} = \frac{4(p+1)}{p+1} \iff \boxed{r = 4}$$

P.A. = (2p + 3 , 2p + 7 , ... , 6p + 7 , ....)

e) n meios aritméticos entre 1 e $n^2$. (Faça uma aplicação do resultado obtido para n = 4).

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

logo: $$r = \frac{n^2 - 1}{n + 2 - 1} = \frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)} \iff r = (n-1)$$

para $n = 4 \implies r = 3$, então:

P.A. = (1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , ....)

## 9. SEQUÊNCIAS OU PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

### 9.1. DEFINIÇÃO

*Chamamos sequências ou progressões geométricas às aplicações do tipo:*

$$f: \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$n \longmapsto y = a \cdot q^n, \quad \text{com} \quad a \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad q \in \mathbf{R}^*$$

Esta mesma definição pode ser dada por uma lei de recorrência e nesse caso diremos que:

*Chamam-se* sequências ou progressões geométricas *às sequências definidas por recorrência de modo que:*

$$\begin{cases} a_1 = a \in \mathbf{R} \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad q \in \mathbf{R}^* \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 \end{cases} \quad \text{onde} \quad q = 2$$

do que se conclui que a sequência pode ser representada por (3, 6, 12, 24, 48, . . . ).

As definições acima permitem obter:

## 9.2. TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Como: $\begin{cases} a_1 = a \\ \text{e} \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$ teremos as deduções:

### POR INDUÇÃO SIMPLES

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ \cdots \quad \cdots\cdots \\ \cdots \quad \cdots\cdots \\ \cdots \quad \cdots\cdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{array}\right\}$$

Multiplicando-se membro a membro, vem:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n = a \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

ou cancelando-se os termos iguais, resulta:

$$a_n = a \cdot q^{n-1}$$

### POR INDUÇÃO MATEMÁTICA

**Teorema:** $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

1) **Comprova-se** para $n = 1$.

$a_1 = a_1 \cdot q^0 = a_1$ (verdade)

2) **Admite-se** para $n = k - 1$ e **prova-se** para $n = k$.

Então $a_{k-1} = a_1 \cdot q^{k-2}$

multiplicando-se ambos os membros por $q$:

$$\underbrace{a_{k-1} \cdot q}_{a_k} = \underbrace{a_1 \cdot q^{k-2} \cdot q}_{a_1 \cdot q^{k-1}}$$

o que prova a fórmula.

## 9.4. CLASSIFICAÇÃO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

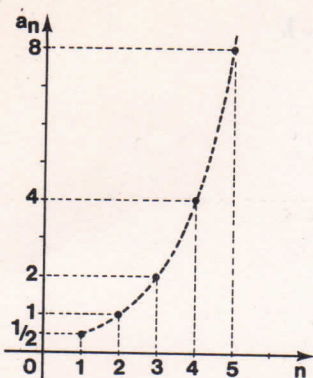
**Quanto ao crescimento.**

Consideraremos 4 casos:

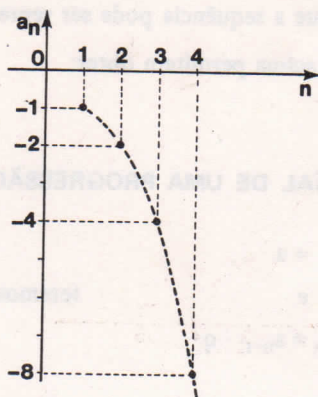
**1º Caso:** $q > 1$

$$q > 1 \implies q^n > q^{n-1} \implies \begin{cases} a_n > a_{n-1} \quad \text{se} \quad a_1 > 0 \implies \text{P.G. estritamente crescente.} \\ \text{e} \\ a_n < a_{n-1} \quad \text{se} \quad a_1 < 0 \implies \text{P.G. estritamente decrescente.} \end{cases}$$

**Exemplos:**

a) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} & (a_1 > 0) \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 & (q > 1) \end{cases}$

A P.G. é estritamente ..... crescente .....

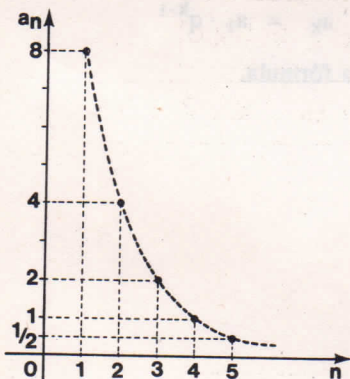
b) 

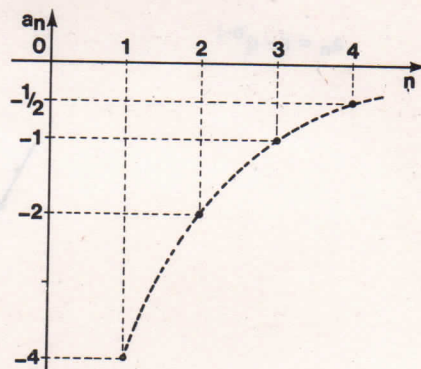
$\begin{cases} a_1 = -1 & (a_1 < 0) \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 & (q > 1) \end{cases}$

A P.G. é estritamente ..... decrescente .....

**2º Caso: $0 < q < 1$**

$$0 < q < 1 \Longrightarrow q^n < q^{n-1} \Longrightarrow \begin{cases} a_n < a_{n-1} & \text{se } a_1 > 0 \Longrightarrow \text{P.G. estritamente decrescente.} \\ \text{e} \\ a_n < a_{n-1} & \text{se } a_1 < 0 \Longrightarrow \text{P.G. estritamente crescente.} \end{cases}$$

**Exemplos:**

a) $\begin{cases} a_1 = 8 & (a_1 > 0) \\ a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} & (0 < q < 1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -4 & (a_1 < 0) \\ a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} & (0 < q < 1) \end{cases}$

A P.G. é estritamente ..... decrescente .....

A P.G. é estritamente ..... crescente .....

**3º Caso: $q = 1$**

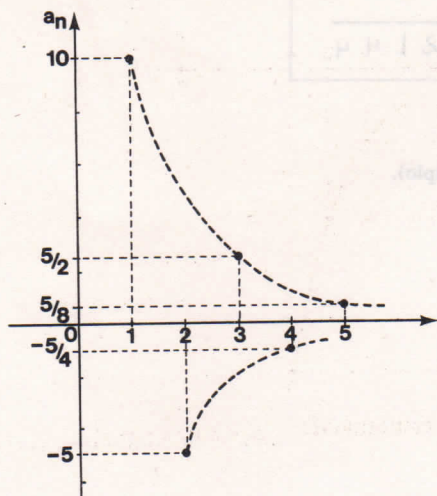
$$q = 1 \Longrightarrow a_n = a_{n-1}$$

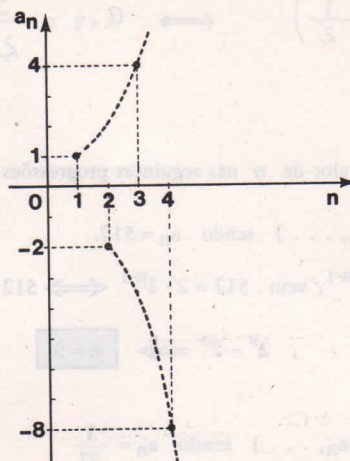
Neste caso a sequência é constante.

**4º Caso: $q < 0$**

$q < 0 \Longrightarrow a_n$ e $a_{n-1}$ tem sinais contrários e portanto a sequência é oscilante.

**Exemplos:**

a) $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = a_{n-1} \cdot (-\frac{1}{2}), \quad (q < 0) \end{cases}$

A P.G. é ....oscilante....

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \cdot (-2), \quad (q < 0) \end{cases}$

A P.G. é ....oscilante....

## 9.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 8

1. Determine os termos indicados em cada uma das sequências ou progressões geométricas.

a) (5, 10, . . . ); $a_{11}$ e $a_{20}$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, portanto:

$a_{11} = 5 \cdot 2^{11-1} \iff a_{11} = 5 \cdot 1024 \iff \boxed{a_{11} = 5120}$

$a_{20} = 5 \cdot 2^{20-1} \iff a_{20} = 5 \cdot 524288 \iff \boxed{a_{20} = 2621440}$

b) $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$; $a_6$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, portanto:

$a_6 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{6-1} \iff a_6 = \frac{3^9}{2^{14}} \iff \boxed{a_6 = \frac{19683}{16384}}$

c) $(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \ldots)$; $a_9$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, portanto:

$a_9 = \frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{9-1} \iff a_9 = \frac{2}{7} \cdot \frac{6561}{256} \iff \boxed{a_9 = \frac{6561}{896}}$

d) $(3, 1\frac{1}{2}, \ldots)$; $a_{19}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, portanto:

$a_{19} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{19-1} \iff a_{19} = \frac{3}{2^{18}} \iff \boxed{a_{19} = \frac{3}{262144}}$

2. Calcular o valor de n nas seguintes progressões geométricas (Veja o 1º exemplo).

a) $(2, 4, 8, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = 512$.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem $512 = 2 \cdot 2^{n-1} \iff 512 = 2^n$

fatorando-se:

$2^9 = 2^n \implies \boxed{n = 9}$

b) $(81, 27, 9, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = \frac{1}{27}$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem $\frac{1}{27} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \iff \frac{1}{3^7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \iff$

$\iff \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \implies n - 1 = 7 \iff \boxed{n = 8}$

c) $(0{,}03;\ 0{,}06;\ 0{,}12;\ \ldots,\ a_n;\ \ldots)$ sendo $a_n = 1{,}92$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem $1{,}92 = 0{,}03 \cdot (2)^{n-1} \iff$

$\iff \frac{1{,}92}{0{,}03} = (2)^{n-1} \iff 64 = (2)^{n-1} \iff n - 1 = 6 \iff \boxed{n = 5}$

d) $(6, 18, 54, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = 1458$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem $1458 = 6 \cdot (3)^{n-1} \iff$

$\iff 243 = (3)^{n-1} \iff n - 1 = 5 \iff \boxed{n = 6}$

3. Determine o valor de $a_1$ nas P.G.; onde:

a) $q = \frac{1}{2}$ e $a_7 = \frac{1}{64}$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem $\frac{1}{64} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} \iff$

$a_1 = \frac{64}{64} \iff \boxed{a_1 = 1}$

b) $a_3 = 12$ e $a_7 = 192$

Como: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem $\begin{cases} 192 = a_1 \cdot q^6 \\ 12 = a_1 \cdot q^2 \end{cases}$

dividindo-se membro a membro, temos:

$$q^4 = \frac{192}{12} \iff q^4 = 16 \iff q = 2 \text{ . Logo:}$$

$$12 = a_1 \cdot 2^2 \iff a_1 = \frac{12}{4} \iff \boxed{a_1 = 3}$$

c) $a_2 = -2$ e $a_1 + a_2 + a_3 = 3$

Como: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem $\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \implies a_1 q = -2 \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 \end{cases}$

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 3 \iff -\frac{2}{q} - 2 - 2q = 3 \iff$$

$$\iff 2q^2 + 5q + 2 = 0 \iff q = -2 \text{ ou } q = -\frac{1}{2}$$

$$q = -2 \implies a_1 \cdot (-2) = -2 \iff \boxed{a_1 = 1}$$

$$q = -\frac{1}{2} \implies a_1 \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \iff \boxed{a_1 = 4}$$

## 10. PROPRIEDADES DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

As progressões geométricas tem as seguintes propriedades características:

### 10.1. PRIMEIRA PROPRIEDADE:

> *Dados três termos consecutivos de uma P.G. de termos positivos, o termo médio é a média geométrica dos outros dois termos.*

Dada a P.G.: $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n, \ldots)$ tomando-se os consecutivos $a_{p-1}, a_p, a_{p+1}$ sabemos que:

$$\frac{a_p}{a_{p-1}} = \frac{a_{p+1}}{a_p} = q$$

Logo: $a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$ ou $\boxed{a_p = \sqrt{(a_{p-1} \cdot a_{p+1})}}$

**Observação:** No caso da P.G. não ser de termos positivos, devemos obter $\boxed{|a_p| = \sqrt{(a_{p-1} \cdot a_{p+1})}}$

### 10.2. SEGUNDA PROPRIEDADE:

> *Em toda P.G. o produto de dois termos quaisquer, $a_p$ e $a_n$, é igual ao produto de dois outros termos quaisquer, equidistantes deles.*

Dada a P.G.: $(a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_{p+k}, \ldots, a_{n-k}, \ldots, a_n, \ldots)$ onde $a_{p+k}$ e $a_{n-k}$ são respectivamente equidistantes a $a_p$ e $a_n$. (Existem $k-1$ termos entre eles).

Como: $\left.\begin{array}{l} a_{p+k} = a_1 \cdot q^{p+k-1} \\ \text{e} \\ a_{n-k} = a_1 \cdot q^{n-k-1} \end{array}\right\}$ multiplicando-se membro a membro, resulta:

$$a_{p+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot q^{p+k-1} \cdot a_1 \cdot q^{n-k-1}$$

multiplicando-se e dividindo-se por $q^k$, vem:

$$a_{p+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot q^{p+k-1} \cdot a_1 \cdot a^{n-k-1} \cdot q^k \cdot q^{-k}, \quad \text{ou}$$

$$a_{p+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot q^{p+k-1-k} \cdot a_1 \cdot q^{n-k-1+k}, \quad \text{ou}$$

$$a_{p+k} \cdot a_{n-k} = \underbrace{a_1 \cdot q^{p-1}}\, \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}$$

logo:

$$\boxed{a_{p+k} \cdot a_{n-k} = a_p \cdot a_n}$$

Esta propriedade permite obter a fórmula que dá o:

## 11. PRODUTO DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.G.

Dada a P.G.: $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}, \ldots, a_{n-p}, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ deseja-se o produto dos $n$ primeiros termos,

ou
$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{p+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-p} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

ou
$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n-p} \cdot \ldots \cdot a_{p+1} \cdot \ldots \cdot a_2 \cdot a_1$$

e multiplicando-se membro a membro, vem:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (a_{p+1} \cdot a_{n-p}) \cdot \ldots \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Ora, são $n$ parênteses todos iguais a $(a_1 \cdot a_n)$ pela propriedade 10.2. Logo:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \text{ou} \quad \boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

No caso da P.G. não ser de termos positivos, deveremos obter o módulo do produto, ou seja:

$$\boxed{|P_n| = \sqrt{|a_1 \cdot a_n|^n}}$$

## 12. SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.G.

Dada a P.G. = $(a_1 \cdot a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ indicaremos a soma dos $n$ primeiros termos por:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad (1)$$

e multiplicando-se os membros por q, vem:

$$q \cdot S_n = a_1 q + a_2 q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \qquad (2)$$

Fazendo-se (2) – (1) membro a membro, resulta:

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1$$

os outros termos se cancelam, pois: $a_p = a_{p-1} \cdot q$

Logo: $S_n(q-1) = a_n \cdot q - a_1$ ou $$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}$$

Esta fórmula tem uma substitutiva lembrando-se que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; então:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1} \quad \text{ou} \quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

## 12.1. FAÇA VOCÊ – TAREFA 9

1. Calcule a soma $S_n$ dos $n$ termos indicados das seguintes sequências geométricas:

a) $(4, 12, 36, \ldots, a_n, \ldots)$ e $n = 12$

Como: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, vem:

$S_{12} = 4 \cdot \frac{3^{12} - 1}{3 - 1} \Longleftrightarrow S_{12} = 2(3^{12} - 1) \Longleftrightarrow$

$\boxed{S_{12} = 1062880}$

b) $(15, 5, 1\frac{2}{3}, \ldots, a_n, \ldots)$ e $n = 10$

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Longrightarrow S_{10} = 15 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{3} - 1} \Longleftrightarrow$

$\boxed{S_{10} = \frac{14762\,0}{6561}}$

c) $(1{,}1;\ 1{,}21;\ 1{,}331;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots)$ e $n = 23$

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Longrightarrow S_{23} = 1{,}1 \cdot \frac{(1{,}1)^{23} - 1}{1{,}1 - 1} \Longleftrightarrow$

$\boxed{S_{23} \cong 87{,}5}$

d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, a_n, \ldots)$ e $n = 13$

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Longrightarrow S_{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{13} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \Longleftrightarrow$

$\boxed{S_{13} = \frac{8191}{8192}}$

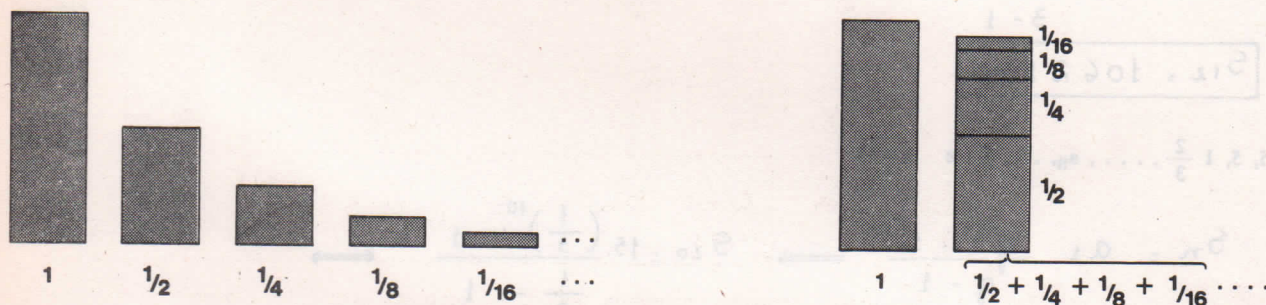
e) $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots, a_n, \ldots)$ e $n = 8$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Longrightarrow S_8 = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1}{\frac{1}{3} - 1} \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{S_8 = \frac{3280}{2187}}$$

## 12.2. LIMITE DA SOMA DOS INFINITOS TERMOS DE UMA P.G. DECRESCENTE

Examinemos a sequência geométrica P.G. $= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$ com infinitos termos.

Vamos representar esses termos graficamente e adicioná-los.

Parece claro que a "soma" dos infinitos termos da P.G. aproximar-se-á de 2. Como a adição é uma operação que somente se define para um número finito de parcelas, diremos que estamos calculando o **limite da soma** e indicaremos por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n \quad \text{ao invés de} \quad S_n$$

e queremos dizer que estamos calculando o **limite da soma dos infinitos termos da P.G. decrescente.** Dizemos nesse caso que a sucessão é **convergente.**

No caso contrário, isto é, nas sucessões do tipo:

$$\text{P.G.} = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$$

com infinitos termos ocorrerá que o limite da soma será **infinito** e diremos que a sucessão é **divergente.**

Vamos estudar as progressões geométricas infinitas cuja razão $q$ obedece à relação $0 < q < 1$ e portanto são decrescentes e convergentes.

Nesses casos, sendo $0 < q < 1$ ocorrerá que $q^n$ tenderá a zero quando *n* cresce indefinidamente; indica-se:

$$q^n \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty$$

Como $\quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad$ se $n \longrightarrow \infty$ resulta:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}}$$

## 12.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 10

1. Calcule o limite da soma de cada uma das P.G. infinitas e decrescentes. (Basta conhecer o termo $a_1$ e a razão $q$).

a) $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots)$

Como $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$, vem:

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \iff \boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{2}}$

b) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots)$

Como $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$, vem:

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2}} \iff \boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{4}{3}}$

c) $(0{,}5;\ 0{,}05;\ 0{,}005;\ \ldots)$

Como $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$, vem:

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0{,}5}{1 - 0{,}1} \iff \boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{5}{9} = 0{,}555\ldots}$

2. Observe que uma dízima periódica simples, ou mesmo composta, pode-se decompor na "soma" de infinitos termos que estão em em P.G. decrescente.

$$0{,}333\ldots\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots\ldots$$

Escreva em forma de "adição" as seguintes dízimas:

a) $0{,}363636\ldots\ldots\ldots = 0{,}\overline{36}$

$0{,}363636\ldots = 0{,}36 + 0{,}0036 + 0{,}000036 + \ldots$

b) $0{,}010101\ldots\ldots\ldots = 0{,}\overline{01}$

$0{,}010101\ldots = 0{,}01 + 0{,}0001 + 0{,}000001 + \ldots$

c) $0{,}4121212\ldots\ldots\ldots = 0{,}4\overline{12}$

$0{,}4121212\ldots = 0{,}4 + 0{,}012 + 0{,}00012 + 0{,}0000012 + \ldots$

3. Determine a fração equivalente (geratriz) de cada uma das seguintes dízimas realizando o **limite da soma** dos infinitos termos de cada uma.

a) $0{,}121212\ldots\ldots\ldots$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \implies \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{0{,}12}{1 - 0{,}01} \iff$

$\iff \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{12}{99}$ que é a geratriz da dízima.

b) 0,132132132 ........

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{0,132}{1-0,001} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{132}{999}$$ que é a geratriz da dízima.

c) 0,4555 .......... (Sugestão: calcule a geratriz de 4,555 .......... e divida o resultado por 10).

A geratriz de 0,4555... será:

$$\frac{4 + \lim_{n\to\infty} S_n}{10} = \frac{4 + \frac{5}{9}}{10} = \frac{41}{90}.$$

d) 0,12444 .......... (Sugestão: calcule a geratriz de 12,444 .......... e divida por 100).

A geratriz de 0,12444... será:

$$\frac{12 + \lim_{n\to\infty} S_n}{100} = \frac{12 + \frac{4}{9}}{100} = \frac{112}{900}$$

e) 2,9606060 ..........

A geratriz de 2,9606060.... será:

$$\frac{29 + \lim_{n\to\infty} S_n}{10} = \frac{29 + \frac{60}{99}}{10} = \frac{2931}{990}$$

4. Determine o conjunto verdade das seguintes sentenças:

a) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots\ldots = 60$ (O 1º membro tem infinitas parcelas)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{3}{2}x = 60 \Longrightarrow x = 40 \quad \therefore \quad V = \{40\}$$

b) $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \ldots\ldots = 20$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}x$$

$$\frac{4}{3}x = 20 \Longrightarrow x = 15 \quad \therefore \quad V = \{15\}$$

c) $x + 0{,}1\,x + 0{,}01\,x + 0{,}001\,x + \ldots\ldots = 40$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x}{1 - 0{,}1} = \frac{x}{0{,}9}$$

$$\frac{x}{0{,}9} = 40 \Longrightarrow x = 36 \quad \therefore \quad V = \{36\}$$

## 13. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Escreva o conjunto imagem ordenado das seguintes sequências:

a) $(a_n)_{n\in N^*}$ onde $a_n = 2n + 5$

b) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 1 \end{cases}$

c) $(a_n)_{n\in N^*}$ onde $a_n = n + (-1)^n$

d) $(a_n)_{n\in N^*}$ onde $a_n = 2^n$

e) $(a_n)_{n\in N^*}$ onde $a_n = 3^{-n}$

f) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3} \end{cases}$

2. Determine o termo $a_7$ das seguintes sequências:

a) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = \frac{3n - 1}{2}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 2 \end{cases}$

c) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = 2n + (-\frac{1}{2})^n$

d) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = \frac{1}{2^n}$

e) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} + a_n = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{n}{n + 1} \cdot a_n \end{cases}$

3. Escreva o conjunto imagem ordenado e represente em **R×R** as sequências:

a) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = 4n$

b) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = \frac{n}{2n + 1}$

c) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = \frac{n - 2}{n}$

d) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = \frac{3n}{n + 2} + \frac{1}{n}$

e) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = \frac{3n}{2} - \frac{1}{2}$

f) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = 4n + (-1)^n \cdot 2$

g) $(a_n)_{n\in N^*}$ sendo $a_n = \frac{2n + 1}{5n}$

### Sequência 2

1. Determine o termo indicado em cada uma das sequências aritméticas:

a) $(2, 9, 16, \ldots)$; $a_{19}$

b) $(50, 48, 46, \ldots)$; $a_{100}$

c) $(7, 6\frac{1}{2}, \ldots)$; $a_{42}$

d) $(98, 90, 82, \ldots)$; $a_{17}$

e) $(-1, 4, 9, \ldots)$; $a_{30}$

2. Determine $n$ nos seguintes casos:

a) $(6, 11, 16, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = 81$

b) $(62, 59, 56, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = -1$

c) $(2{,}3;\ 4;\ 5{,}7;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots)$ sendo $a_n = 63{,}5$

d) $(26, 19, 12, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = -51$

e) $(\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = 35$

3. Determine a razão, dados:

a) $a_1 = 15$ e $a_{16} = 60$

b) $a_1 = -3$ e $a_{12} = 74$

c) $a_1 = 1{,}8$ e $a_{22} = 27$

d) $a_1 = \frac{1}{5}$ e $a_{21} = \frac{11}{5}$

4. Determine $a_1$ dados:

a) $r = 3$ e $a_{15} = 50$

b) $r = 0{,}3$ e $a_{21} = \frac{39}{5}$

c) $r = -2$ e $a_{17} = 24$

d) $r = 8$ e $a_{10} = 70$

5. Determine a soma $S_n$ dos termos das seguintes progressões aritméticas, até os termos indicados:

a) $(-10, -7, -4, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = 50$

b) $(71, 67, 63, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = -53$

c) $(2{,}01;\ 2{,}02;\ 2{,}03;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots)$ sendo $a_n = 3{,}00$

d) $(a, a + 1, \ldots, a_n, \ldots)$ sendo $a_n = (a + n - 1)$

6. Inserir tantos meios aritméticos quantos se pedem em cada caso, entre $a_1$ e $a_n$ que são dados:

a) 48 meios aritméticos entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{472}{5}$

b) 10 meios aritméticos entre 0,3 e 4,8.

c) 16 meios aritméticos entre 7 e 8,6.

## Sequência 3

1. O quinto termo de uma sequência aritmética é 17 e o terceiro é 11. Determine o primeiro e o sétimo termos.

2. O segundo termo de uma sequência aritmética é três vezes o sétimo e o nono termo é 1. Determine o primeiro termo, a razão e o primeiro termo negativo.

3. A razão de uma sequência aritmética é 12. Calcule a diferença entre o décimo segundo e o sétimo termos.

4. Determine quantos múltiplos de 7 existem entre 100 e 1000.

5. O quarto termo de uma sequência aritmética é 15, e a soma dos primeiros 5 termos é 55. Ache o primeiro termo, a razão e escreva os 5 primeiros termos.

6. A soma dos primeiros 3 termos de uma sequência aritmética é 3, e a soma dos primeiros 5 termos é 20. Determine os primeiros 5 termos da sequência.

7. O segundo termo de uma sequência aritmética é 15 e o quinto é 21. Ache a razão, o primeiro termo e a soma dos primeiros 10 termos.

8. Ache a soma dos números ímpares compreendidos entre 100 e 200.

9. Numa sequência aritmética, a diferença entre o quinto e o segundo termos é 15 e a soma do quarto com o sétimo é 59. Determine a sequência.

10. O quarto termo de uma sequência aritmética é 18, e a razão é −5. Ache o primeiro termo e a soma dos primeiros 16 termos.

## Sequência 4

1. Determine os termos indicados em cada uma das sequências geométricas:

a) $(3, -2, \ldots)$; $a_8$

b) $(10, 25, \ldots)$; $a_7$

c) $(\frac{2}{5}, \frac{-4}{5}, \ldots)$; $a_{11}$

d) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots)$; $a_{15}$

e) $(2, 6, \ldots)$; $a_{10}$

2. Determine *n*, nos seguintes casos:

a) (64, 32, 16, . . . , $a_n$, . . . ) sendo $a_n = \frac{1}{4}$

b) (0,2; 0,02; 0,002; . . . , $a_n$, . . . ) sendo $a_n = 0{,}000002$

c) (3, 6, 12, . . . , $a_n$, . . . ) sendo $a_n = 1536$

3. Determine $a_1$ nos seguintes casos:

a) $a_5 = 9$ e $a_7 = \frac{27}{4}$

b) $a_4 = -6$ e $a_7 = 48$

c) $q = \frac{1}{3}$ e $a_8 = \frac{1}{27}$

4. Calcule a soma $S_n$ dos *n* termos indicados das seguintes sequências geométricas:

a) (1, –2, 4, . . . ) e n = 17

b) (24, –12, 6, . . . ) e n = 50

c) (3, 6, 12, . . . ) e n = 15

5. Calcule o limite da soma dos termos, quando $n \longrightarrow \infty$, das seguintes progressões geométricas:

a) (0,54; 0,0054; 0,000054; . . . )

b) $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots)$

c) (54, –18, 6, –2, . . . )

6. Expresse as seguintes dízimas como frações, realizando o limite da soma dos infinitos termos de cada uma:

a) 1,00444 .........

b) 0,010101 .........

c) 3,222 .........

## Sequência 5

1. O terceiro termo de uma sequência geométrica é 2 e o quinto é 18. Determine os possíveis valores da razão e os respectivos segundos termos.

2. O primeiro termo de uma sequência geométrica é 16 e o quinto é 9. Calcule o sétimo termo.

3. Determine 4 números, tais que eles sejam consecutivos de uma sequência geométrica e a soma dos 2 primeiros seja 28 e a soma dos 2 últimos seja 175.

4. A soma dos primeiros 2 termos de uma sequência geométrica é 3 e a soma do segundo e do terceiro é –6. Determine o primeiro termo e a razão da sequência.

5. O terceiro termo de uma sequência geométrica é 10 e o sexto é 80. Determine a razão, o primeiro termo e a soma dos 6 primeiros.

6. Quantos termos da sequência geométrica (–2, –6, –18, –54, . . . ), a partir do primeiro, são necessários para se obter a soma $(1 - 3^8)$?

7. Numa sequência geométrica, o primeiro termo é 5, a soma dos *n* primeiros é 26 e o produto dos *n* primeiros é 1. Determine a sequência.

8. Se o limite da soma de uma sequência geométrica é três vezes o primeiro termo, quanto vale a razão?

9. O limite da soma de uma sequência geométrica é 4 e o segundo termo é 1. Ache o primeiro, o terceiro e o quarto termos.

10. O segundo termo de uma sequência geométrica é 24 e o limite da soma é 100. Ache os dois possíveis valores da razão e dos correspondentes termos.

# O BINÔMIO DE NEWTON

## 14. FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

**Veja; o produto: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ indica-se $4!$ e se lê: fatorial do número 4.**

**Então:** $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ e $2! = 2 \cdot 1 = 2$.

**É claro que ocorrerá uma dificuldade para se definir $1!$ e $0!$ pois, tratando-se de um conceito que envolve multiplicação, deveriam existir pelo menos dois fatores.**

**Todavia convenciona-se que: $0! = 1$.**

**Desse modo poderemos dar uma definição por recorrência, como segue:**

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n(n-1)! & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

**Da convenção $0! = 1$ e desta definição decorrerá que $1! = 1$, como segue:**

**Como $n! = n(n-1)!$ então $1! = 1 \cdot (1-1)!$ ou $1! = 1 \cdot 0!$ donde $1! = 1 \cdot 1 = 1$.**

**Exemplos:**

$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$

$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$

$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$

$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

$7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$

## 15. COEFICIENTES BINOMIAIS

### 15.1. DEFINIÇÃO

*Dados n e p naturais, sendo $n \geqslant p$ chama-se coeficiente binomial* **n sobre p** *e se indica $\binom{n}{p}$ àquele definido por:*

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 1, & \text{se } p = 0 \\ \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}, & \text{se } p \neq 0 \end{cases}$$

Por analogia com as frações, n é chamado **numerador** e p **denominador** do coeficiente binomial $\binom{n}{p}$

Veja: em $\binom{5}{2}$ temos $\begin{cases} n = 5 \qquad p = 2 \\ n - p + 1 = 5 - 2 + 1 = 4 \end{cases}$

Logo $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10.$

## 15.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 11

1. Calcule os seguintes coeficientes binomiais:

a) $\binom{3}{1}$

n = 3 p = 1

n – p + 1 = 3 – 1 + 1 = 3

Logo $\binom{3}{1} = \frac{3}{1!} = \frac{3}{1} = 3$

b) $\binom{10}{5}$

n = 10 p = 5

n – p + 1 = 10 – 5 + 1 = 6

Logo $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = \frac{30240}{120} = 252$

c) $\binom{3}{3}$

n = 3 p = 3

n – p + 1 = 3 – 3 + 1 = 1

Logo $\binom{3}{3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = \frac{6}{6} = 1$

d) $\binom{6}{2}$

n = 6 p = 2

n – p + 1 = 6 – 2 + 1 = 5

Logo $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 15$

e) $\binom{5}{4}$

n = 5 p = 4

n – p + 1 = 5 – 4 + 1 = 2

Logo $\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = \frac{120}{24} = 5$

2. Calcule as expressões:

a) $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \frac{3}{1!} + \frac{3 \cdot 2}{2!} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} =$

$= \frac{3}{1} + \frac{6}{2} + \frac{6}{6} = 7$

b) $0! + \binom{2}{0} + \binom{2}{1} - \binom{2}{2} = 1 + 1 + \frac{2}{1!} - \frac{2 \cdot 1}{2!} =$

$= 1 + 1 + 2 - 1 = 3$

c) $\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + \frac{5 \cdot 4}{2!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} =$

$= 1 + 10 + 5 = 16$

d) $\binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5} = \frac{5}{1!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!} =$

$= 5 + 10 + 1 = 16$

# 16. PROPRIEDADES DOS COEFICIENTES BINOMIAIS

## 16.1. PRIMEIRA PROPRIEDADE

Você sabe que: $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!}$

Veja, se multiplicarmos numerador e denominador da fração por $(5 - 2)!$, isto é, por $3!$, vem:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!}$$

e o coeficiente binomial $\binom{5}{2}$ fica dado em função apenas de **fatoriais.**

## 16.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 12

1. Calcule os seguintes coeficientes binomiais em função de fatoriais:

a) $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!\,4!} = \frac{7!}{3!\,4!}$

b) $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!\,2!} = \frac{4!}{2!\,2!}$

c) $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3!\,5!} = \frac{8!}{3!\,5!}$

d) $\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{4!\,1!} = \frac{5!}{4!\,1!}$

e) $\binom{6}{1} = \frac{6}{1!} = \frac{6 \cdot 5!}{1!\,5!} = \frac{6!}{1!\,5!}$

É claro que, se tivermos um coeficiente binomial do tipo $\binom{n}{p}$ ocorrerá:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n \cdot (n-1)\dots(n-p+1) \cdot (n-p)!}{p!\,(n-p)!}$$

pois ao produto $n(n-1)\dots(n-p+1)$ falta o fator $(n-p)!$ para se transformar em $n!$ Daí:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Donde:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

2. Calcule então, utilizando apenas os símbolos de fatorial:

a) $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\ 4!} = 5$

b) $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\ 1!} = 3$

c) $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\ 2!} = 3$

d) $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\ 1!} = 5$

## 16.3. COEFICIENTES BINOMIAIS COMPLEMENTARES

$\binom{5}{2}, \binom{5}{3}$ se dizem complementares, veja $2 + 3 = 5$.

$\binom{7}{1}, \binom{7}{6}$ também são complementares, veja $1 + 6 = 7$.

Define-se pois:

> *Coeficientes binomiais complementares são aqueles que tem o mesmo numerador e cuja soma dos denominadores é igual ao numerador.*

Demonstraremos que:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

Como:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

e

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,[n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Conclui-se: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

## 16.4. UMA APLICAÇÃO

Determinemos x em: $\binom{7}{2x+2} = \binom{7}{4-x}$;

ora, se os dois coeficientes binomiais são iguais, ocorrerá que: ou **os denominadores são iguais** ou então **a soma dos denominadores será** 7 (que é o numerador comum).

*Na 1ª hipótese:* $2x + 2 = 4 - x \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$

**o que é impossível pois os termos dos coeficientes binomiais são números naturais.**

*Na 2ª hipótese:* $2x + 2 + 4 - x = 7 \iff x + 6 = 7 \iff x = 1.$

**que se comprova por substituição, pois:**

$$\binom{7}{2 \cdot 1 + 2} = \binom{7}{4 - 1} \quad \text{ou} \quad \binom{7}{4} = \binom{7}{3}$$ **que são complementares.**

Logo $x = 1$ **é a única solução.**

## 16.5. FAÇA VOCÊ – TAREFA 13

1. Determine o valor de x em cada uma das sentenças. (Observe que na igualdade de coeficientes binomiais você deverá examinar as duas hipóteses).

a) $\binom{16}{x+1} = \binom{16}{3x-1}$

Na 1ª hipótese: $x + 1 = 3x - 1 \iff -2x = -2 \iff x = 1$ O que se comprova pois: $\binom{16}{2} = \binom{16}{2}$.

Na 2ª hipótese: $x + 1 + 3x - 1 = 16 \iff 4x = 16 \iff x = 4$ O que se comprova pois $\binom{16}{5} = \binom{16}{11}$ são complementares.

Logo: $x = 1$ ou $x = 4$

b) $\binom{14}{x+2} = \binom{14}{2x}$

1º) $x + 2 = 2x \iff -x = -2 \iff x = 2$

Realmente: $\binom{14}{4} = \binom{14}{4}$

2º) $x + 2 + 2x = 14 \iff 3x = 12 \iff x = 4$

$\binom{14}{6} = \binom{14}{8}$ pois são complementares.

Portanto: $x = 2$ ou $x = 4$

c) $\binom{10}{x^2 - 5} = \binom{10}{-5x + 1}$

1º) $x^2 - 5 = -5x + 1 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff x = -6$, que é absurdo pois teríamos $\binom{10}{31} = \binom{10}{31}$ e em $\binom{n}{p}$, $n \geq p$ ou $x = 1$, que também é impossível pois em $\binom{10}{-4} = \binom{10}{-4}$, os termos não são naturais.

2º) $x^2 - 5 - 5x + 1 = 10 \iff x^2 - 5x - 14 = 0 \iff x = 7$, donde $\binom{10}{44} = \binom{10}{-34}$, absurdo ou $x = -2$ donde $\binom{10}{-1} = \binom{10}{11}$, absurdo

Portanto: $\nexists x \mid \binom{10}{x^2 - 5} = \binom{10}{-5x + 1}$

d) $\binom{14}{x^2 - 2} = \binom{14}{2x + 1}$

1º) $x^2 - 2 = 2x + 1 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = 3$,

donde $\binom{14}{7} = \binom{14}{7}$ ou $x = -1$,

donde $\binom{14}{-1} = \binom{14}{-1}$, absurdo.

2º) $x^2 - 2 + 2x + 1 = 14 \iff x^2 + 2x - 15 = 0 \iff$

$x = 3$, donde $\binom{14}{7} = \binom{14}{7}$ ou

$x = -5$, donde $\binom{14}{23} = \binom{14}{-9}$, absurdo.

Logo: $x = 3$

### 16.6. RELAÇÃO DE STIFFEL

**Propriedade:**

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

**Para mostrarmos esta igualdade basta fazer a adição do 1º membro e chegar ao 2º membro**

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}$$

observe que: $(n-p)! = (n-p)\,(n-p-1)!$ e $p! = p \cdot (p-1)!$

Portanto:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{p(n-1)! + (n-p)\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \frac{(p+n-p)\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Donde:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

## 17. O BINÔMIO DE NEWTON

Provaremos que:

*Dados* **a** *e* **b∈R** *e* **n∈N**, *vale a relação:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Faremos a prova por **indução finita sobre n.**

*1ª Parte:* **Verifica-se** para $n = 1$.

1º membro: $(a+b)^1 = a + b$

2º membro: $\binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a + b$

Logo: $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$

*2ª Parte:* **Admite-se para $n = k$ e prova-se para $n = k + 1$.**

$$n = k \Longrightarrow (a+b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \ldots + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + \binom{k}{k} b^k$$

**Basta multiplicar membro a membro a igualdade anterior por $a + b$ e utilizar a relação de Stiffel:**

$$(a+b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \ldots + \binom{k}{k-1} ab^{k-1} + \binom{k}{k} b^k$$

$$\underline{a+b} \quad = \quad a+b$$

$$\binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \ldots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} ab^k$$

$$+ \binom{k}{0} a^k b + \ldots + \quad \ldots \quad + \binom{k}{k-1} ab^k + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \ldots + \quad \ldots \quad + \binom{k+1}{k} ab^k + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

Como $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$

vem: $$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \ldots + \binom{k+1}{k} ab^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$$

**o que prova que a fórmula vale para $n = k + 1$ e, portanto, para qualquer $n \in N$.**

Ou seja:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

que pode ser indicado por: $$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Quando se tratar de $(a-b)^n$ os sinais ficarão alternados, pois:

$$(a-b)^n = [a + (-b)]^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} (-b)^p \qquad \text{e,}$$

como $(-b)^p = (-1)^p \cdot (b)^p$ vem:

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

## 17.1. TERMO GERAL DO BINÔMIO

Como: $$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0} a^n}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b}_{T_2} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{p} a^{n-p} b^p}_{T_{p+1}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n} b^n}_{T_{n+1}}$$

vê-se que o desenvolvimento do binômio tem $n + 1$ termos; o termo geral será então designado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

desse modo: em $(a + b)^{10}$ o coeficiente do 8º termo é $\binom{10}{7}$.

em $(a + b)^{15}$ o coeficiente do 3º termo é $\binom{15}{2}$.

No caso de se tratar de $(a - b)^n$ o termo geral ficará:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

## 17.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 14

1. Calcule os termos indicados em cada um dos desenvolvimentos seguintes:

a) $(a + 2)^5$; $T_5$ e $T_6$

$$T_5 = \binom{5}{4} a^{5-4} 2^4 = \frac{5!}{4!\,1!} a^1 \cdot 16 = 80a$$

$$T_6 = \binom{5}{5} a^{5-5} 2^5 = \frac{5!}{5!\,0!} a^0 \cdot 32 = 32$$

b) $(a - 1)^{10}$; $T_1$ e $T_5$

$$T_1 = \binom{10}{0} a^{10-0} 1^0 = \frac{10!}{10!\,0!} a^{10} \cdot 1 = a^{10}$$

$$T_5 = \binom{10}{4} a^{10-4} 1^4 = \frac{10!}{4!\,6!} a^6 \cdot 1 = 210\,a^6$$

c) $(a + 3)^{10}$; $T_4$ e $T_6$

$$T_4 = \binom{10}{3} a^{10-3} 3^3 = \frac{10!}{7!\,3!} a^7 \cdot 27 = 3240\,a^7$$

$$T_6 = \binom{10}{5} a^{10-5} 3^5 = \frac{10!}{5!\,5!} a^5 \cdot 243 = 61236\,a^5$$

d) $(x + 2)^{100}$; $T_{99}$

$$T_{99} = \binom{100}{98} x^{100-98} 2^{98} = \frac{100!}{98!\,2!} x^2 \cdot 2^{98} = 4950 \cdot 2^{98} \cdot x^2$$

2. Desenvolva os binômios seguintes, utilizando a fórmula do ítem anterior.

a) $(a + x)^5 = \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4x + \binom{5}{2} a^3x^2 + \binom{5}{3} a^2x^3 + \binom{5}{4} a x^4 + \binom{5}{5} x^5 =$

$= a^5 + 5a^4x + 10\,a^3x^2 + 10\,a^2x^3 + 5\,a x^4 + x^5$

b) $(a + 1)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 \cdot 1 + \binom{4}{2} a^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3} a \cdot 1^3 + \binom{4}{4} 1^4 =$

$= a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1.$

c) $(a - 1)^4 = \binom{4}{0} a^4 - \binom{4}{1} a^3 \cdot 1 + \binom{4}{2} a^2 \cdot 1^2 - \binom{4}{3} a \cdot 1^3 + \binom{4}{4} 1^4 =$

$= a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1.$

d) $(a - x)^6 = \binom{6}{0} a^6 - \binom{6}{1} a^5 x + \binom{6}{2} a^4 x^2 - \binom{6}{3} a^3 x^3 + \binom{6}{4} a^2 x^4 - \binom{6}{5} a x^5 + \binom{6}{6} x^6 =$

$= a^6 - 6a^5 x + 15a^4 x^2 - 20a^3 x^3 + 15a^2 x^4 - 6ax^5 + x^6$

3. Verificar se existe termo independente de $x$ no desenvolvimento dos binômios seguintes: (*Sugestão:* deve-se verificar qual o valor de $p$ no termo geral, tal que $(n - p) - p = 0$).

a) $(x + \frac{1}{x})^5$

$T_{p+1} = \binom{5}{p} x^{5-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{5}{p} x^{5-p} x^{-p} = \binom{5}{p} x^{5-2p}$

Para que $T_{p+1}$ independa de $x \Longrightarrow 5 - 2p = 0$ mas $\nexists\, p \in N \mid 5 - 2p = 0$.

Logo não existe termo independente de $x$.

b) $(x - \frac{2}{x})^8$

$T_{p+1} = (-1)^p \binom{8}{p} x^{8-p} \left(\frac{2}{x}\right)^p = (-1)^p \binom{8}{p} x^{8-p-p} 2^p$

$T_{p+1} = (-1)^p \binom{8}{p} x^{8-2p} 2^p$

Se $8 - 2p = 0 \longrightarrow p = 4 \longrightarrow T_5$ independe de $x$.

c) $(3x - \frac{1}{x})^{11}$

$T_{p+1} = (-1)^p \binom{11}{p} (3x)^{11-p} \left(\frac{1}{x}\right)^p =$

$= (-1)^p \binom{11}{p} 3^{11-p} x^{11-p-p} = (-1)^p \binom{11}{p} 3^{11-p} x^{11-2p}$

Como $\nexists\, p \in \mathbb{N} \mid 11 - 2p = 0 \Longrightarrow$

Não existe termo independente de $x$

## 18. PROPRIEDADES DOS COEFICIENTES DE $(a + b)^n$

Existem algumas propriedades entre os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$.

Você vai verificá-las a partir das sugestões que apresentamos. São fáceis, veja:

## 18.1. PRIMEIRA PROPRIEDADE:

> *No desenvolvimento de $(a + b)^n$ a soma dos coeficientes de ordem par é igual à soma dos coeficientes de ordem ímpar.*

Basta tomar $(a + b)^n$, desenvolver e fazer $a = 1$ e $b = -1$.

Como $(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$, se $a = 1$ e $b = -1$

vem: $0 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p$

ou $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$

ou $$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

## 18.2. SEGUNDA PROPRIEDADE:

> *No desenvolvimento de $(a + b)^n$ a soma dos coeficientes é igual a $2^n$.*

Faça $a = b = 1$ em $(a + b)^n$ e prove:

Em $(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$; se $a = b = 1$

vem: $(2)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

ou $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

# 19. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Calcular o desenvolvimento de:

a) $(2x + a)^5$

b) $(2x - \frac{1}{2})^6$

c) $(1 - a)^7$

d) $(\frac{2}{3} x^2 - \frac{3}{2} x)^5$

e) $(a + b)^n$

f) $(a - b)^n$

2. Calcular o 8º termo do desenvolvimento de:

a) $(x - 1)^{10}$

b) $(2x^2 - x)^9$

3. Calcular o termo independente de $x$ no desenvolvimento de:

a) $(x^2 - \frac{1}{x})^4$

b) $(3x - \frac{2}{x^2})^5$

c) $(x^3 + \frac{4}{x^2})^6$

d) $(\frac{1}{x} + 3x^3)^7$

## Sequência 2

1. Determinar qual o termo de maior coeficiente no desenvolvimento de $(a + b)^n$, quando: $n$ é par e quando $n$ é ímpar.

2. Utilizando a fórmula do binômio, determinar a soma dos quadrados dos $n$ primeiros números naturais.
Sugestão: Em $(1 + k)^3$, fazer $k = 1, 2, \ldots, n$.

3. Determinar a soma dos coeficientes de:

a) $(x + b)^6$

b) $(x - b)^7$

4. Determinar o(s) termo(s) médio(s) do desenvolvimento de $(a + b)^n$, quando:

a) $n$ é ímpar

b) $n$ é par.

5. Determinar o termo médio do desenvolvimento de:

a) $(x^2 - 3x)^8$

b) $(a - 2b)^7$

6. Desenvolva os produtos, escrevendo em forma de polinômios em $x$.

a) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)$

b) $(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

c) $(x + a)(x + b)(x + c)$

d) $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$.

7. Determinar uma lei de formação para os coeficientes do desenvolvimento do produto:

$$P = (x + a)(x + b)(x + c) \ldots (x + n),$$

isto é, se

$$P = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Mx + N,$$

determinar uma lei de formação para $A, B, \ldots, M, N$, em função de $a, b, \ldots, n$.

# capítulo 4 ANÁLISE COMBINATÓRIA

## 20. INTRODUÇÃO

A **análise combinatória** estuda as possibilidades de ocorrer um determinado acontecimento ou evento. Calcula o número dessas possibilidades e fornece os elementos essenciais para diferenciar as categorias possíveis desses eventos.

Assim, por exemplo:

**1ª Questão**

*Com 3 alunos posso formar apenas 3 comissões onde em cada uma figurem sempre 2 alunos (Verifique).*

Mas:

**2ª Questão**

*Com 3 alunos posso formar 6 comissões de dois alunos cada uma, onde sempre figurem um presidente e um secretário.* (Verifique).

Mas:

**3ª Questão**

*Se chamo ao quadro três alunos, um de cada vez, posso fazê-lo de seis modos diferentes.* (Verifique).

Veja como representamos a solução das questões propostas acima. Digamos que os alunos sejam o Antonio, Benê e o Carlos.

**1ª Questão:** {A, B} {A, C} {B, C}.

**2ª Questão:** (A, B) (A, C) (B, A) (B, C) (C, A) (C, B).

**3ª Questão:** (A, B, C) (A, C, B) (B, A, C) (B, C, A) (C, A, B) (C, B, A)

Mas, usamos **chaves** { } na primeira questão e **parênteses** ( ) nas 2ª e 3ª questões:

– Por quê? ? ?

– É fácil. Porque vale em Matemática o princípio:

> *Nomes iguais e símbolos iguais para coisas e fatos iguais, nomes diferentes e símbolos diferentes para coisas e eventos diferentes.*

Na 1ª questão os agrupamentos de dois elementos não **dependem da ordem.** São subconjuntos do conjunto A, B, C. Como Antonio e Benê representam a mesma comissão que Benê e Antônio, ou seja $\{A, B\} = \{B, A\}$, basta usar chaves que é a representação para subconjuntos.

Na 2ª questão os subconjuntos são **ordenados**, isto é, são **pares ordenados** tirados de A, B, C. Vimos que os parênteses ( ) servem para indicar sequências que são subconjuntos ordenados. Essa é a razão dos parênteses, pois:

$$(A, B) \neq (B, A).$$

Na 3ª questão ocorre o mesmo, pois o problema exige que se identique os modos de chamar três alunos ao quadro, um a um. Deve-se respeitar a ordem e portanto o uso dos parênteses identifica as respostas.

$$(A, B, C) \neq (A, C, B) \neq (B, A, C) \ldots \text{etc} \ldots$$

## 20.1. FAÇA VOCÊ – TAREFA 15

Represente os agrupamentos possíveis, usando chaves { } ou parênteses ( ) quando for o caso.

a) Com quatro alunos quero formar comissões de dois elementos em cada uma. (Chame os alunos de A, B, C, D).

{A, B} ; {A, C} ; {A, D} ; {B, C} ; {B, D} ; {C, D} .

b) Com quatro alunos quero formar comissões com três elementos em cada uma.

{A, B, C} ; {A, B, D} ; {A, C, D} ; {B, C, D}

c) Com os algarismos 1, 2, 3 quero formar todos os números possíveis de 3 algarismos, sem repetir, no mesmo número, um mesmo algarismo.

(1 2 3) ; (1 3 2) ; (2 1 3) ; (2 3 1) ; (3 1 2) ; (3 2 1)

d) Com os algarismos 1, 2, 3 quero formar todos os números de 2 algarismos, sem repetição do mesmo algarismo no mesmo número.

(1 2) ; (2 1) ; (1 3) ; (3 1) ; (2 3) ; (3 2).

e) Com 5 objetos (lápis, borracha, caderno, moeda e dado) quero formar todos os agrupamentos de dois objetos em cada agrupamento.

{l, b} ; {l, c} ; {l, m} ; {l, d} ; {b, c}

{b, m} ; {b, d} ; {c, m} ; {c, d} ; {m, d} .

f) Com as letras **A, M, O** quero formar todos os anagramas possíveis, sem repetição de letras, que tenham sempre:

1º) Duas letras em cada anagrama.

(AM) ; (MA) ; (AO) ; (OA) ; (MO) ; (OM).

2º) Três letras em cada anagrama.

(AMO) ; (MAO) ; (AOM) ; (OAM) ; (MOA) ; (OMA).

Para contar o **número de possibilidades** de cada um dos problemas seguintes será necessário conhecer o Princípio Fundamental da Contagem.

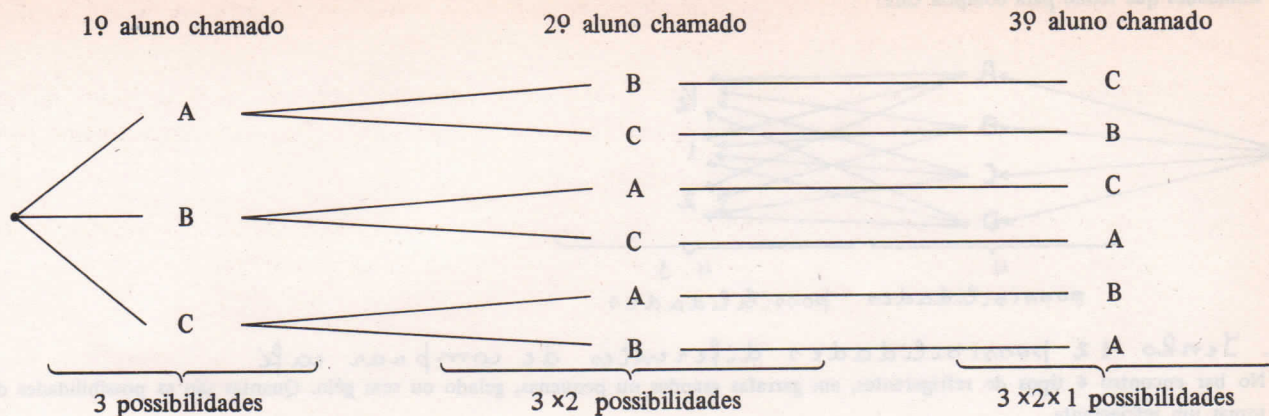
## 21. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

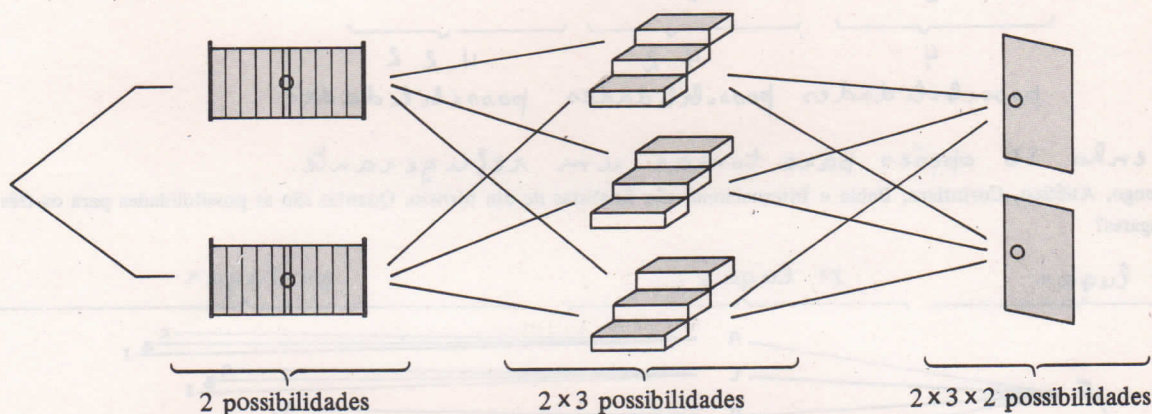
### 21.1. 1º Exemplo:

Suponhamos o problema da 3ª questão, ou seja, *chamar ao quadro três alunos, sendo um de cada vez.*

Os alunos formam o conjunto:

{Antonio, Benê, Carlos}.

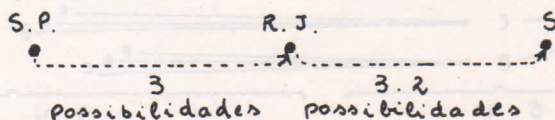
e as possibilidades formam o que se chama: **árvore de possibilidades.**

**21.2. 2º Exemplo:**

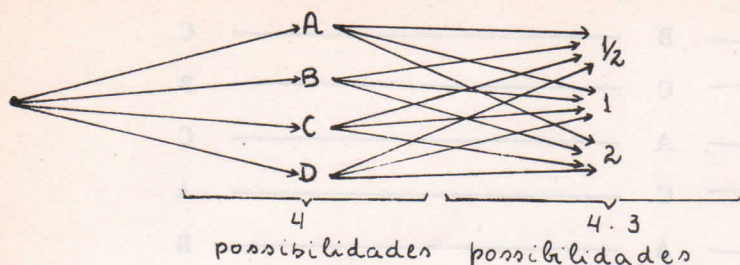
Suponhamos que, para chegar a sua sala de aula existam **dois portões**, depois **três escadas** para ir ao 1º andar e lá mais **duas portas** para entrar na sala. Quantos são os caminhos possíveis para chegar até sua sala?

Destes exemplos e de outros semelhantes conclui-se o **Princípio Fundamental da Contagem.**

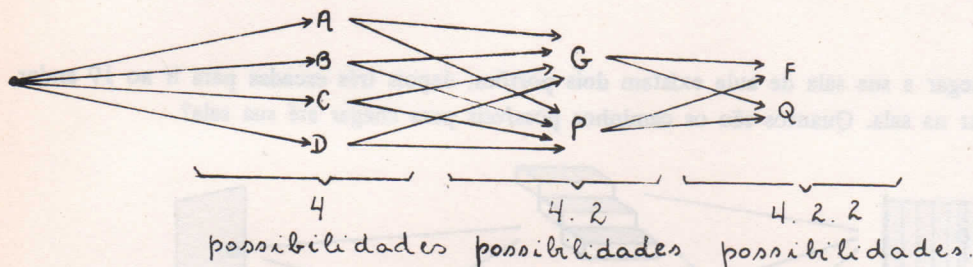
> *Se um evento é composto por duas (ou mais) etapas sucessivas e independentes de tal modo que:*
>
> **a** *é o número de possibilidades da 1ª etapa.*
> **b** *é o número de possibilidades da 2ª etapa.*
>
> *Então,* **a · b** *é o número total de possibilidades do evento ocorrer.*

**21.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 16**

1. Determine o número de possibilidades em cada um dos casos propostos:

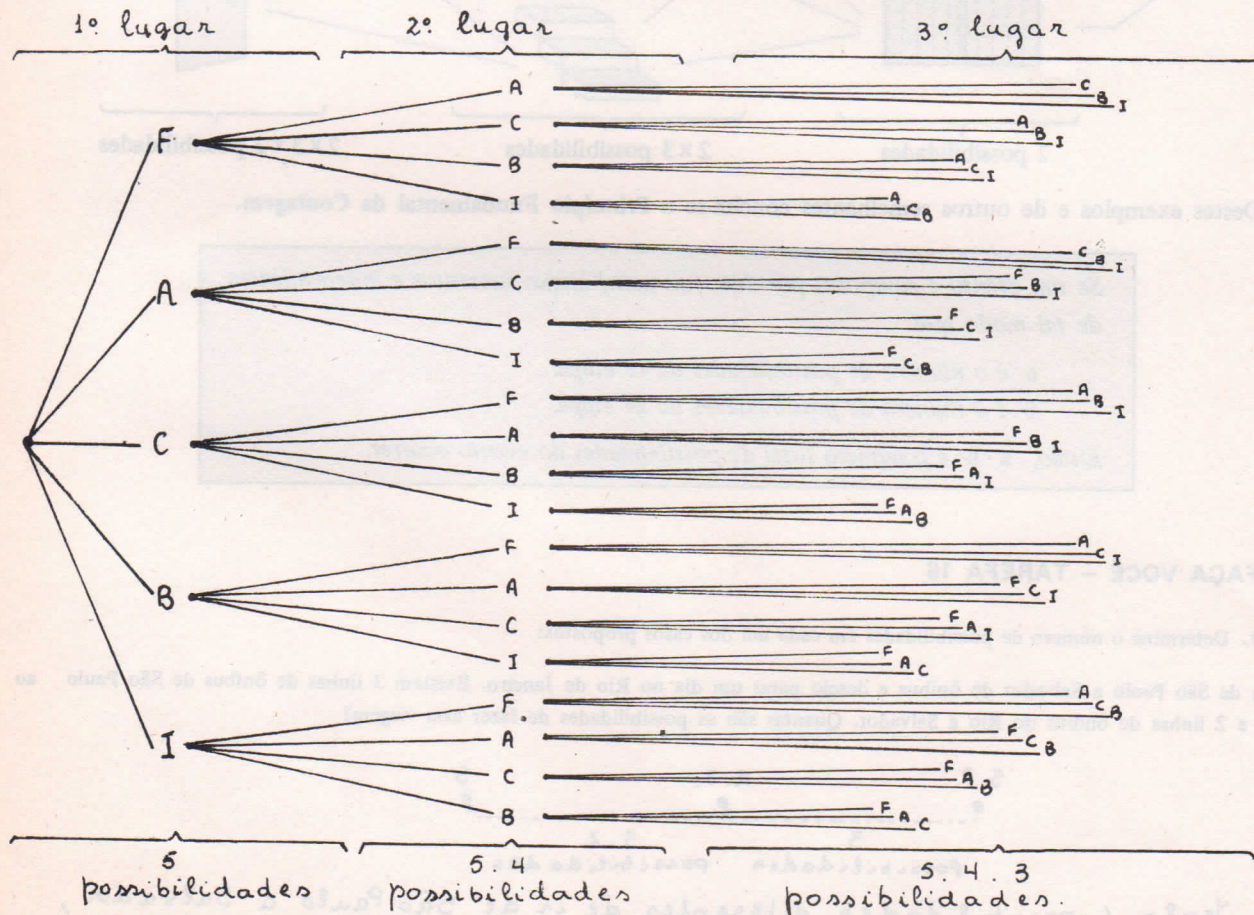
a) Vou de São Paulo a Salvador de ônibus e desejo parar um dia no Rio de Janeiro. Existem 3 linhas de ônibus de São Paulo ao Rio e 2 linhas de ônibus do Rio a Salvador. Quantas são as possibilidades de fazer esta viagem?

R. Tenho 6 possibilidades diferentes de ir de São Paulo a Salvador, parando um dia no Rio.

b) Num supermercado encontro 4 marcas de café e cada uma delas tem pacotes de $\frac{1}{2}$ quilo, 1 quilo e dois quilos. Quantas são as possibilidades que tenho para comprar café?

R. Tenho 12 possibilidades diferentes de comprar café.

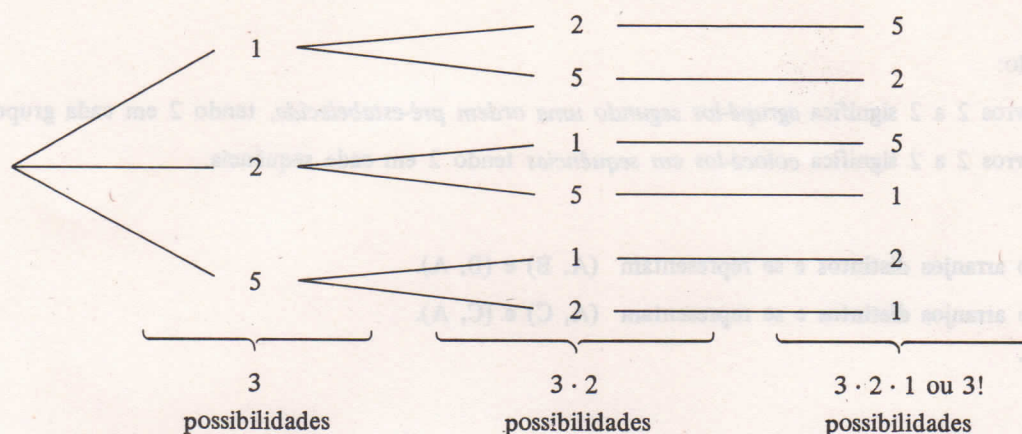
c) No bar encontro 4 tipos de refrigerantes, em garrafas grandes ou pequenas, gelado ou sem gêlo. Quantas são as possibilidades de tomar um refrigerante.

R. Tenho 16 opções para tomar um refrigerante.

d) Flamengo, Atlético, Corintians, Bahia e Internacional são finalistas de um torneio. Quantas são as possibilidades para os três primeiros lugares?

1º lugar — 2º lugar — 3º lugar

5 possibilidades — 5 . 4 possibilidades — 5 . 4 . 3 possibilidades.

R. São 60 possibilidades.

## 22. PERMUTAÇÕES SIMPLES

Com os algarismos 1, 2 e 5 formaremos todos os números possíveis de três algarismos sem repetição; a árvore de possibilidades dará:

Esses números 125, 152, 215, 251, 512, 521 correspondem a **ternos ordenados** que se representam por:

$$(1, 2, 5)\ (1, 5, 2)\ (2, 1, 5)\ (2, 5, 1)\ (5, 1, 2)\ (5, 2, 1).$$

e chamam-se **permutações simples dos três algarismos 1, 2 e 5.**

Indica-se: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ ou $P_3 = 3!$

Você pode observar que no caso de n **elementos distintos** a árvore de possibilidades dará:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$P_n = n!$$

e definiremos

> *Chamam-se* **permutações simples de n elementos distintos** *aos agrupamentos sem repetição que se podem formar com esses* n *elementos de modo que um agrupamento difira do outro pela ordem dos elementos.*

**Permutar** significa então **mudar a posição,** isto é, significa **mudar a ordem.**

Observa-se ainda, que nas permutações de n elementos figuram sempre todos os n elementos.

## 23. COMBINAR OU ARRANJAR

Em Matemática **combinar** é diferente de **arranjar**; suponhamos 4 livros de Matemática distintos: Volume **A**, Volume **B**, Volume **C** e Volume **D**.

> **Combinar** *os quatro livros 2 a 2 é essencialmente diferente que* **arranjar** *os quatro elementos 2 a 2.*

**Combinar** 4 livros 2 a 2 significa *agrupá-los de qualquer modo* tendo 2 em cada *grupo.*

**Combinar** 4 livros 2 a 2 significa *amontoá-los,* tendo 2 livros em cada *monte.*

**Combinar** 4 livros 2 a 2 significa *empacotá-los,* tendo 2 livros em cada *pacote.*

Então:

**AB é a mesma combinação que BA e se representa** {A, B}.

**AC é a mesma combinação que CA e se representa** {A, C}.

**DB é a mesma combinação que BD e se representa** {B, D}.

**e assim por diante.**

**Por outro lado:**

**Arranjar** 4 livros 2 a 2 significa ***agrupá-los segundo uma ordem pré-estabelecida,*** tendo 2 em cada grupo.

**Arranjar** 4 livros 2 a 2 significa ***colocá-los em sequências*** tendo 2 em cada sequência.

Então:

AB e BA são **arranjos distintos** e se representam (A, B) e (B, A).

AC e CA são **arranjos distintos** e se representam (A, C) e (C, A).

e assim por diante.

**Resumindo:**

> **Combinações** ***não exigem critérios de ordem;*** são agrupamentos do tipo, ***amontoamento, grupo, . . .***
>
> **Arranjos** ***exigem uma ordem;*** definem uma ***sequência;*** são ***agrupamentos ordenados.***

Por isto você vai trabalhar um pouco com estes conceitos.

### 23.1. FAÇA VOCÊ – TAREFA 17

1. Sejam elementos A, B, C e D. Forme com esses 4 elementos o que se pede em cada caso e represente os agrupamentos pedidos, usando as chaves { } ou os parênteses ( ) conforme você achar conveniente.

a) **Combinação 2 a 2 de** { A, B, C, D }

{A, B} ; {A, C} ; {A, D} ; {B, C} ; {B, D} ; {C, D}

b) **Arranjos 2 a 2 de** { A, B, C, D }

(A, B) ; (B, A) ; (A, C) ; (C, A) ; (A, D) ; (D, A)

(B, C) ; (C, B) ; (B, D) ; (D, B) ; (C, D) ; (D, C)

c) **Combinações 2 a 2 de** {A, B, C}

{A, B} ; {A, C} ; {B, C}

d) **Arranjos 2 a 2 de** {A, B, C}

(A, B), (B, A), (A, C) ; (C, A) ; (B, C) ; (C, B)

e) **Permutações de** {A, B, C}

(A, B, C) ; (A, C, B) ; (B, C, A)

(B, A, C) ; (C, A, B) ; (C, B, A)

f) **Combinações 1 a 1 de** {A, B, C, D}

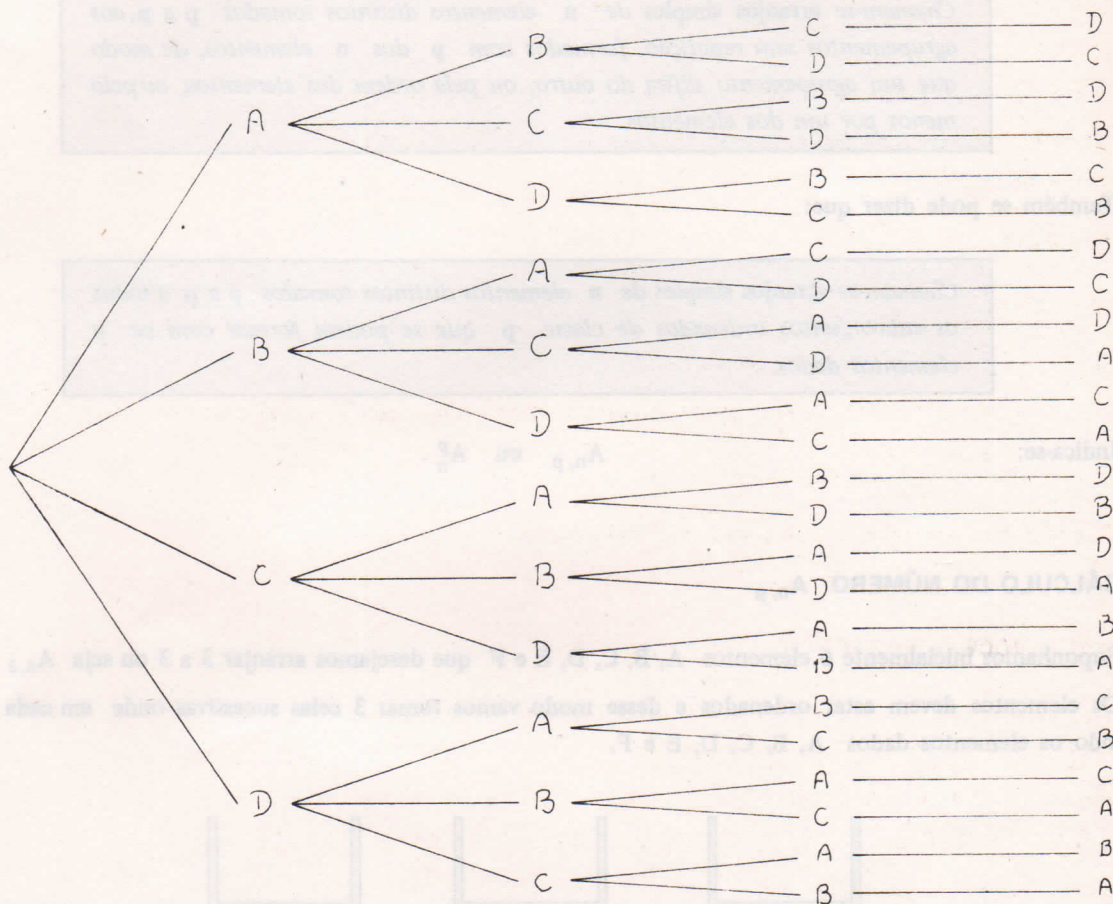
{A}, {B}, {C}, {D}

g) **Arranjos 1 a 1** de $\{A, B, C, D\}$

(A) ; (B) ; (C) ; (D) .

h) **Combinações 4 a 4** de $\{A, B, C, D\}$!! (Este não dá trabalho)

{A, B, C, D}

i) **Arranjos 4 a 4** de $\{A, B, C, D\}$!! (Este dá trabalho) (*Sugestão:* forme uma árvore de possibilidades).

(A,B,C,D) ; (A,B,D,C) ; (A,C,B,D) ; (A,C,D,B) ; (A,D,B,C) ; (A,D,C,B) .

(B,A,C,D) ; (B,A,D,C) ; (B,C,A,D) ; (B,C,D,A) ; (B,D,A,C) ; (B,D,C,A)

(C,A,B,D) ; (C,A,D,B) ; (C,B,A,D) ; (C,B,D,A) ; (C,D,A,B) ; (C,D,B,A)

(D,A,B,C) ; (D,A,C,B) ; (D,B,A,C) ; (D,B,C,A) ; (D,C,A,B) ; (D,C,B,A)

## 24. ARRANJOS SIMPLES DE n ELEMENTOS TOMADOS p a p

Você já conceituou o que são arranjos simples.

Não viu ainda uma definição formal que passaremos a examinar.

Vamos inicialmente formar todos os arranjos sem repetição dos elementos A, B, C, D tomados 2 a 2; vejam:

(A, B) (A, C) (A, D) (B, C) (B, D) (C, D)
(B, A) (C, A) (D, A) (C, B) (D, B) (D, C).

Vê-se que:

- Na mesma linha, dois agrupamentos diferem entre si pela **qualidade**, isto é, pela **natureza** de seus elementos. Dizemos que **diferem entre si, pelo menos por um dos elementos.**

- Na mesma coluna dois agrupamentos diferem entre si pela **ordem de seus elementos.**

O exemplo mostra arranjos de **classe** 2 ou **taxa** 2, ou de **módulo** 2 ou ainda **agrupados** 2 a 2.

Definimos então:

> *Chamam-se* **arranjos simples** *de* n *elementos distintos tomados* p *a* p, *aos agrupamentos sem repetição, formados com* p *dos* n *elementos, de modo que um agrupamento difira do outro, ou pela ordem dos elementos, ou pelo menos por um dos elementos.*

Também se pode dizer que:

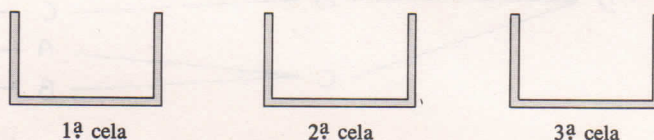
> *Chamam-se* **arranjos simples** *de* n *elementos distintos tomados* p *a* p *a todos os subconjuntos ordenados de classe* p *que se podem formar com os* n *elementos dados.*

Indica-se: $A_{n,\,p}$ ou $A_n^p$.

## 24.1. CÁLCULO DO NÚMERO $A_{n,\,p}$

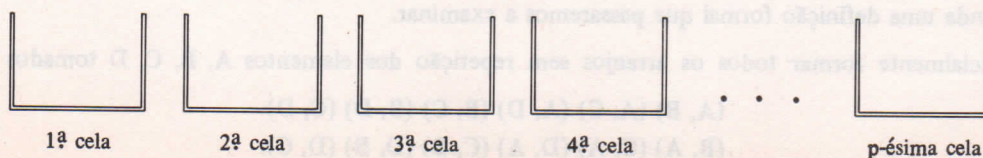
Suponhamos inicialmente 6 elementos A, B, C, D, E e F que desejamos arranjar 3 a 3 ou seja $A_{6,\,3}$.

Os elementos devem estar ordenados e desse modo vamos tomar 3 celas sucessivas onde em cada uma iremos colocando os elementos dados A, B, C, D, E e F.

1ª cela 2ª cela 3ª cela

- A primeira cela pode ser preenchida de 6 modos diferentes.
- A segunda cela poderá ser preenchida de 5 modos diferentes, pois um elemento já foi consumido na 1ª cela.
- A terceira cela poderá ser preenchida de 4 modos diferentes, pois dois elementos terão sido consumidos nas celas anteriores.

Logo, pelo princípio multiplicativo teremos: $A_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

No caso geral, supondo-se n elementos arranjados p a p, necessitaremos p celas.

1ª cela 2ª cela 3ª cela 4ª cela . . . p-ésima cela

Suponhamos que cada cela será preenchida por um elemento representado por uma bolinha. Começamos com n bolinhas.

n possibilidades para preencher a 1ª cela.

1ª cela

(n - 1) possibilidades para preencher a 2ª cela.

1ª cela 2ª cela

(n - 2) possibilidades para preencher a 3ª cela.

1ª cela 2ª cela 3ª cela

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

   .......... 

(n - p + 1) possibilidades para preencher a p-ésima cela.

1ª cela 2ª cela 3ª cela p-ésima cela

E, pelo princípio multiplicativo:

   .......... 

n(n - 1) (n - 2) . . . (n - p + 1)
são as possibilidades para preencher as **p** celas.

1ª cela 2ª cela 3ª cela p-ésima cela

Logo:

$$A_{n,\,p} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$$

Veja: para calcular.

a) $A_{6,\,3}$ teremos $\begin{cases} n = 6 \\ p = 3 \end{cases}$

$n - p + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$

$A_{6,\,3} = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{3 \text{ fatores}} = 120$

b) $A_{9,\,4}$ teremos $\begin{cases} n = 9 \\ p = 4 \end{cases}$

$n - p + 1 = 9 - 4 + 1 = 6$

$A_{9,\,4} = \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{4 \text{ fatores}} = 3024$

Também se observa que:

$$A_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6!}{(6-3)!}$$

$$A_{9,\,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9!}{(9-4)!}$$

e observando a fórmula geral (à semelhança do que fizemos em coeficientes binomiais).

$$A_{n,p} = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Donde:

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

que é uma 2ª fórmula para Arranjos Simples

**24.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 18**

Calcule, aplicando a fórmula, os seguintes arranjos simples.

a) $A_{7,3}$

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$$

b) $A_{8,5}$

$$A_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6720$$

c) $A_{9,2}$

$$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 72$$

d) $A_{5,3}$

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$$

e) $A_{6,1}$

$$A_{6,1} = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6 \cdot 5!}{5!} = 6$$

## 25. COMBINAÇÕES SIMPLES DE n ELEMENTOS TOMADOS p a p

Vimos que **combinar** 4 elementos 2 a 2 – por exemplo – significa formar subconjuntos de classe 2 com 4 elementos dados.

$$\{A, B, C, D\} \Longrightarrow \begin{cases} \{A, B\} \quad \{A, C\} \quad \{A, D\} \\ \{B, C\} \quad \{B, D\} \quad \{C, D\} \end{cases}$$

Definiremos então:

> *Chamam-se* **combinações simples** *de* **n** *elementos distintos tomados* **p** *a* **p** *a todos os subconjuntos de classe* **p** *dos* **n** *elementos dados.*

ou ainda:

> *Chamam-se* **combinações simples** *de* **n** *elementos distintos tomados* **p** *a* **p** *aos agrupamentos sem repetição formados com* **p** *dos* **n** *elementos dados, de modo que um agrupamento difira do outro pelo menos por um dos elementos.*

Representa-se: $C_{n,p}$ ou $C_n^p$.

## 25.1. CÁLCULO DE $C_{n,\,p}$

Será fácil ver que vale a

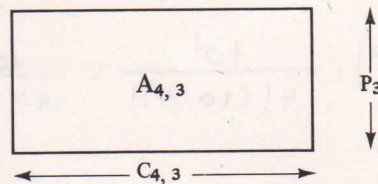
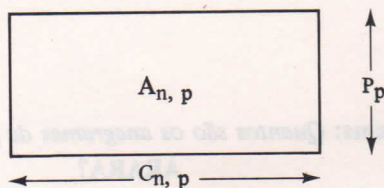
**Propriedade:** $$A_{n,\,p} = C_{n,\,p} \cdot P_p$$

Para tanto, formemos – como modelo – o quadro dos arranjos simples de quatro elementos A, B, C e D, tomados 3 a 3.

- Inicialmente a 1ª linha, onde os agrupamentos diferem entre si pelo menos por um dos elementos.

ABC ABD ACD BCD.

- Em segundo lugar permutando em colunas cada um desses agrupamentos obtendo todos os arranjos.

(A, B, C) (A, B, D) (A, C, D) (B, C, D)
(A, C, B) (A, D, B) (A, D, C) (B, D, C)
(B, A, C) (B, A, D) (C, A, D) (C, B, D)
(B, C, A) (B, D, A) (C, D, A) (C, D, B)
(C, A, B) (D, A, B) (D, A, C) (D, B, C)
(C, B, A) (D, B, A) (D, C, A) (D, C, B)

De modo geral teremos:

Ou $C_{n,\,p} \cdot P_p = A_{n,\,p}$

donde

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{P_p}$$

Como $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ e $P_p = p!$

Teremos

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Conclui-se também:

**Corolário:** $$C_{n,\,p} = \binom{n}{p}$$

De fato:

$$\left.\begin{array}{l} C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \\ \text{e} \\ \dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \end{array}\right\} \text{Donde} \quad C_{n,\,p} = \binom{n}{p}$$

ou seja:

*O número das combinações simples dos* **n** *elementos tomados* **p** *a* **p** *é igual ao número do coeficiente binomial* **n** *sobre* **p.**

## 25.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 19

Calcule, com o uso da fórmula, as seguintes combinações simples:

a) $C_{5,2}$

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!\;3!} = \frac{20}{2} = 10$$

b) $C_{4,3}$

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!\;1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!\;1} = 4$$

c) $C_{6,6}$

$$C_{6,6} = \binom{6}{6} = \frac{6!}{6!\,(6-6)!} = \frac{6!}{6!\;0!} = 1$$

d) $C_{10,4}$

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\;6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$$

e) $C_{7,1}$

$$C_{7,1} = \binom{7}{1} = \frac{7!}{1!\,(7-1)!} = \frac{7 \cdot 6!}{1 \cdot 6!} = 7$$

# 26. PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

**1º Problema:** ***Quantos são os anagramas da palavra* ALUNO?**

**Como $n = 5$, e as cinco letras são distintas, basta imaginá-las em 5 celas e permutá-las.**

**Vejamos:**

| A | L | U | N | O |
|---|---|---|---|---|

**O número de permutações simples de 5 elementos é solução do problema; obteremos 120 anagramas do tipo:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | L | O | N | U |
| O | L | A | N | U |
| O | L | U | N | A |
| U | L | O | N | A |

**e assim por diante.**

**Então:**

$$P_5 = 120$$

**é o número procurado.**

**2º Problema:** ***Quantos são os anagramas da palavra* ARARA?**

**Como $n = 5$, mas três letras são do tipo A e duas do tipo R podemos proceder do mesmo modo como ao lado e apenas para efeito de raciocínio, identificar as letras A, com índices.**

| $A_1$ | R | $A_2$ | R | $A_3$ |
|---|---|---|---|---|

**Permutando essas letras A, obteremos:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | R | $A_3$ | R | $A_2$ |
| $A_2$ | R | $A_1$ | R | $A_3$ |
| $A_2$ | R | $A_3$ | R | $A_1$ |
| $A_3$ | R | $A_1$ | R | $A_2$ |
| $A_3$ | R | $A_2$ | R | $A_1$ |

**Obtivemos 6 anagramas iguais, isto é 3! anagramas repetidos.**

**O mesmo ocorrerá com as permutações do R, pois:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | $R_1$ | A | $R_2$ | A |

**e**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | $R_2$ | A | $R_1$ | A |

**são o mesmo anagrama. Significa que o verdadeiro número de anagramas ficou multiplicado por 3! e por 2!**

Desses fatos concluímos que o número de permutações dos cinco elementos da palavra ARARA deve ser dividido por 3! e por 2!, ou seja:

$$\frac{5!}{2!\ 3!}$$

é o número das permutações dos cinco elementos dados, sendo três de uma categoria (A) e 2 de outra categoria (R).

**Indica-se:** $P_5^{3,\,2} = \frac{5!}{3!\ 2!} = \frac{120}{12} = 10.$

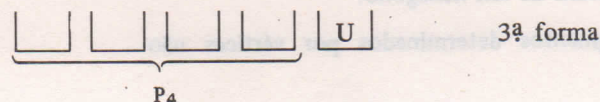
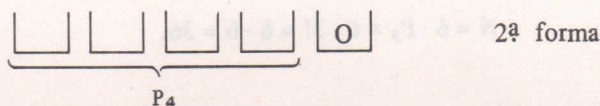
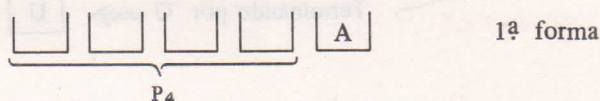
No caso geral, quando n são os elementos, sendo $\alpha$, de uma categoria, $\beta$ de outra e $\gamma$ de outra, (por exemplo) e ainda $\alpha + \beta + \gamma = n$, teremos:

$$\boxed{P_n^{\alpha,\,\beta,\,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}}$$

## 26.1. APLICAÇÕES

1. *Permutemos de todos os modos possíveis as letras da palavra* **ALUNO** *de modo que os anagramas sempre terminem com vogal.*

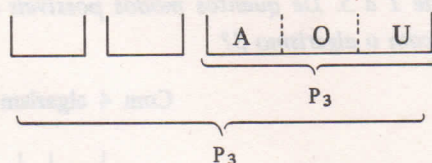
São 5 celas e são três as vogais, basta fixar as vogais na última cela.

Veja:

Concluímos que o número pedido é dado por:

$N = 3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 72$ ou $\boxed{N = 72}$

2. *Permutemos de todos os modos possíveis as letras da palavra* **ALUNO** *de modo que as vogais estejam sempre juntas.*

n = 5 mas, as três vogais vão ocupar sempre uma cela apenas; vejamos:

Mesmo juntas as vogais permutam-se de $P_3$ modos distintos.

Logo o número total será:

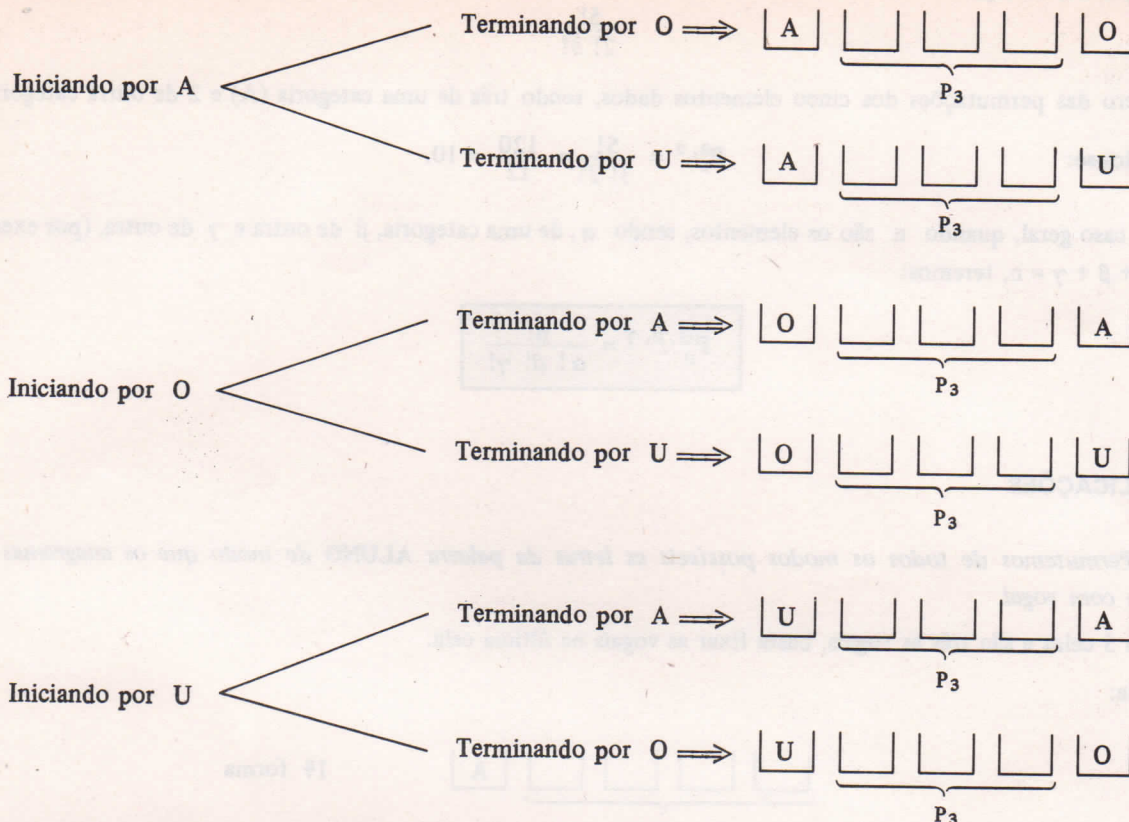
$N = P_3 \cdot P_3 = 3!\ 3! = 6 \cdot 6 = 36$ ou $\boxed{N = 36}$

3. *Permutemos de todos os modos possíveis as letras da palavra* **ALUNO**, *de modo que os anagramas comecem por vogal e terminem por vogal.*

São cinco celas, obedecendo à propriedade: *"começa e termina por vogal"*. Então teremos:

Iniciando por A
- Terminando por O $\Longrightarrow$ | A | _ | _ | _ | O | ($P_3$)
- Terminando por U $\Longrightarrow$ | A | _ | _ | _ | U | ($P_3$)

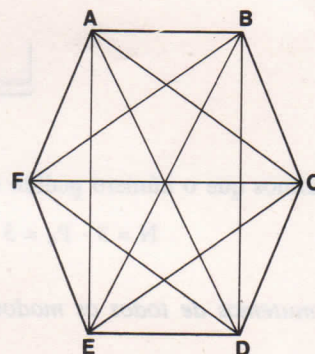
Iniciando por O
- Terminando por A $\Longrightarrow$ | O | _ | _ | _ | A | ($P_3$)
- Terminando por U $\Longrightarrow$ | O | _ | _ | _ | U | ($P_3$)

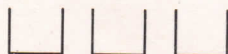
Iniciando por U
- Terminando por A $\Longrightarrow$ | U | _ | _ | _ | A | ($P_3$)
- Terminando por O $\Longrightarrow$ | U | _ | _ | _ | O | ($P_3$)

Logo: $N = 6 \cdot P_3 = 6 \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36.$

4. *Quantas são as diagonais de um hexágono?*

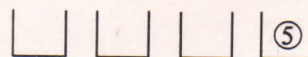
As diagonais são segmentos determinados por vértices não consecutivos.

$\overline{AC}$ e $\overline{CA}$ representam a mesma diagonal. Então necessitamos obter **combinações simples** dos seis vértices tomados dois a dois. Como essas combinações incluem os lados, basta excluí-los da contagem final. Assim:

$$D = C_{6,2} - 6 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} - 6 = 15 - 6 = 9 \quad \therefore \quad \boxed{D = 9}$$

5. *Uma criança tem 5 cartões numerados de 1 a 5. De quantos modos possíveis ela formará números de 3 algarismos? E de 4 algarismos que terminam sempre com o algarismo 5?*

**Com 3 algarismos**

Serão sempre três celas onde a ordem é importante; logo trata-se de arranjos simples dos 5 algarismos tomados 3 a 3.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

**Com 4 algarismos terminados em 5**

Serão quatro celas mas a última é fixa; logo devemos arranjar os restantes 4 elementos nas 3 celas permutáveis. Teremos:

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

6. *Tenho 8 folhas de papel, de cores diferentes; quero encapar 3 livros, um de cada cor. Quantas são as formas possíveis?*

Neste caso a ordem não é importante. Trata-se de **juntar**, **agrupar** as 8 folhas de 3 em 3 e examinar todas as possibilidades.

$$\begin{cases} n = 8 \\ p = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad C_{8,3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 5!} = 56$$

7. *Um propagandista tem 9 amostras distintas para distribuir a 3 médicos A, B e C. De quantos modos poderá fazer a distribuição, dando 4 amostras ao médico A, 3 amostras ao médico B e duas ao médico C?*

Como a ordem das amostras não é importante, trata-se de combinar tais amostras. Assim:

**Ao médico A:** $C_{9,4} = \dfrac{9!}{4!\,(9-4)!} = \dfrac{9!}{4!\,5!} = 126$

**Ao médico B:** $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!\,(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$

**Ao médico C:** $C_{2,2} = \dfrac{2!}{2!\,(2-2)!} = \dfrac{2!}{2!\,0!} = 1$

Logo o número total de possibilidades será o produto:

$C_{9,4} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2}$ ou $M = 126 \cdot 10 \cdot 1 = 1260$ possibilidades.

8. *Examinemos o mesmo problema anterior no caso em que se dissesse:*

*4 amostras a um dos médicos* (ou A ou B ou C)

*3 amostras a outros dois médicos*

*2 amostras ao terceiro médico*

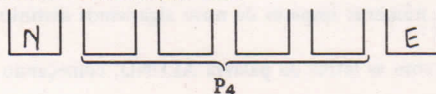
Bastaria multiplicar o resultado do problema anterior por 3! pois a escolha da distribuição poderia ser feita de $P_3$ modos diferentes.

Logo: $M = 3! \cdot 1260 = 7560$ maneiras diferentes.

## 26.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 20

Calcule o que se pede:

1. Quantos são os anagramas da palavra **NÚMERO**, que começam por N e terminam por E?

São 6 celas; basta fixar o N na primeira cela e E na última cela.

Portanto o número pedido é dado por:

N = $P_4$ = 4! = 4 3 2 1 = 24

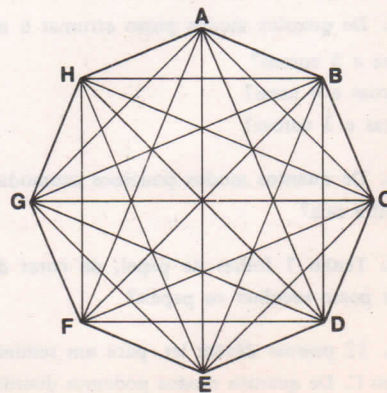
R. Existem 24 anagramas da palavra NÚMERO que começam por N e terminam por E.

2. Quantas diagonais tem um **octógono** (polígono de 8 lados)?

Como $\overline{AE}$ e $\overline{EA}$ representam a mesma diagonal, basta obter combinações simples dos 8 vértices tomados 2 a 2 e excluir desse total os 8 lados.

Portanto:

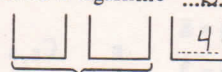
$D = C_{8,2} - 8 = \dfrac{8!}{2!\,6!} - 8 = 20$

R. São 20 as diagonais do octógono.

3. Com os algarismos de 1 a 5, quantos números de três algarismos distintos podemos formar de modo que:

a) os números formados sejam pares?

b) os números formados sejam ímpares?

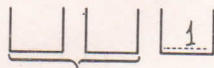
a) Serão três celas. Mas para garantir que o número seja par na última cela deverá aparecer o algarismo ...2... ou o algarismo ...4...

Portanto: [ ] [ ] [2] ou [ ] [ ] [4]

Então: $N = 2 \cdot A_{4,2} = 2 \cdot \frac{4!}{2!} = 2 \cdot 12 = 24$

b) Serão três celas. E para garantir que o número seja ímpar, na última cela deverá aparecer o algarismo ...1... ou o algarismo ...3... ou o ...5...

Portanto: [ ] [ ] [1]

[ ] [ ] [3]

[ ] [ ] [5]

$N = 3 \cdot A_{4,2}$

$N = 3 \cdot \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 12 = 36$

4. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra **ESPERTO**?

A palavra ESPERTO tem 7 letras, ...2... das quais são repetidas.

Portanto concluímos que o número de permutações da palavra ESPERTO deve ser dividido por ...2!...

$N = P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

R. Existem ...2520... anagramas distintos da palavra ESPERTO.

## 27. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Com os algarismos de 1 a 9, quantos números ímpares de nove algarismos distintos podemos formar?

2. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra **ALUNO**, começando por vogal e terminando por consoante?

3. Quantos anagramas podemos formar com a palavra **ESPERTO**, começando por vogal e terminando por consoante?

4. Qual o número de anagramas da palavra **PROBLEMA** em que as consoantes ficam sempre juntas e as vogais também ficam sempre juntas?

5. De quantos modos posso arrumar 6 moedas em linha reta, ficando para cima:

a) 1 cara e 5 coroas?

b) 2 coroas e 4 caras?

c) 3 caras e 3 coroas?

6. De quantos modos podemos acomodar as 9 secretárias de um escritório em 3 salas, A, B e C, ficando 4 em uma, 3 em outra e 2 em outra sala?

7. Tenho 7 folhas de papel, de cores diferentes, e quero encapar 4 livros de matérias distintas, um de cada cor. De quantas maneiras posso escolher os papéis?

8. 12 pessoas devem ler, para um seminário de literatura, 3 livros diferentes. Dispõe-se de 3 volumes do livro A, 5 do livro B e 4 do livro C. De quantos modos podemos distribuir os volumes?

9. Uma classe é composta de 45 alunos, sendo 15 moças, todas externas, e 30 rapazes, 20 internos e 10 externos. Deseja-se formar uma comissão constituída por:

- um presidente, necessariamente interno
- uma secretária (moça)
- 3 outros membros quaisquer.

Quantas possibilidades existem para a escolha desta comissão?

10. Num acampamento de escoteiros existem 3 barracas: I, II e III. De quantos modos podem alojar-se 12 escoteiros, ficando:

a) 4 em cada uma?

b) 5 na barraca I, 5 na barraca II e 2 na barraca III?

c) 6 na barraca I, 6 na II?

d) 5 na barraca I, 4 na II e 3 na III?

## Sequência 2

1. Determinar o número de planos determinados pelos vértices de uma pirâmide cuja base é um eneágono (9 lados).

2. Quantas diagonais tem um icoságono? Quantas diagonais tem um polígono de n lados?

3. Quantas diagonais tem o icosaedro? (20 faces). Quantas diagonais tem o dodecaedro?

4. Dado um cubo, quantos tetraedros existem cujos vértices são vértices do cubo?

5. De quantos modos se pode extrair um grupo de 5 cartas de um jogo de 52 cartas, de modo que este grupo contenha 3, e somente 3, reis?

6. Uma urna possui 5 bolas numeradas.

a) Calcular o número de possibilidades quando se retira, **sucessivamente**, 3 bolas, sem reposição.

b) Calcular o número de possibilidades quando se retira 2 bolas, **ao mesmo tempo.**

7. Uma urna contém 10 bolas, sendo 4 brancas, 3 azuis e 3 vermelhas. De quantos modos podemos formar grupos de 5 bolas contendo, cada um deles, pelo menos uma bola de cada cor?

8. Os 25 alunos de uma classe querem organizar uma comissão com um presidente, um secretário e um tesoureiro. Quantas comissões diferentes poderão formar?

9. Quantas comissões de 6 elementos podem ser formadas com os 30 alunos de uma classe, com um presidente, um secretário, um tesoureiro e 3 membros auxiliares?

10. Calcular o número total de números constituídos de 3 algarismos ímpares distintos e 2 pares distintos que podem ser formados com os algarismos de 1 a 9.

11. Qual o total de números ímpares de 5 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos de 0 a 9?

12. Dados os algarismos de 0 a 9:

a) quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

b) quantos deles são divisíveis por 5?

13. Qual o número de anagramas da palavra **PROBLEMA** em que as consoantes ficam na ordem **PRBLM** e as vogais na ordem **OEA**?

14. Sobre 2 retas paralelas marcam-se, respectivamente, 7 pontos e 9 pontos. Quantos triângulos podemos determinar com estes 16 pontos?

15. Com os algarismos de 1 a 9, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar de modo que a soma dos algarismos seja par?

## Sequência 3

1. De quantos modos 8 pessoas podem ocupar 2 salas distintas, devendo cada sala conter, pelo menos, 3 pessoas?

2. 30 atores serão escolhidos de um grupo de 100 para encenarem uma peça teatral que consta de 17 personagens femininos e 13 masculinos. Sabendo-se que o grupo tem 30 mulheres e 70 homens, pergunta-se de quantos modos podem ser distribuidos os papéis.

3. Sabe-se que no jogo de pôquer, quando participam 4 pessoas, são distribuídas inicialmente 5 cartas para cada uma, de um baralho de 32 cartas. Quantas distribuições distintas podem ocorrer?

4. Com uma letra M, uma letra D e um certo número de letras A, podemos formar 20 permutações. Calcular o número de letras A.

5. Seja ABCD um retângulo e E o ponto de encontro das diagonais. Quantos triângulos existem cujos vértices pertencem ao conjunto $\{A, B, C, D, E\}$ ?

6. Considerando os vértices de um hexágono regular e o centro da circunferência circunscrita, quantos triângulos pertencem ao conjunto dos 7 pontos podemos traçar?

7. Permutando-se os números 1, 3, 4, 5, 7, qual a soma dos números formados?

8. Mamãe tem 4 filhos; titia I tem 3 filhos; titia II tem 5 filhos. A relação $x$ é primo de $y$ tem quantos elementos?

9. De quantas maneiras podemos colorir uma bandeira com 12 faixas horizontais usando 3 cores, de forma que não haja 2 faixas juntas de mesma cor?

10. Com 11 rapazes, de quantas maneiras diferentes posso formar simultaneamente, para treinar, um quadro de bola-ao-cesto e um de volibol?

11. Numa mesa de jogo existem 6 lugares.

a) De quantas maneiras diferentes podem-se sentar 6 pessoas?
b) E se 2 delas devem ficar sempre juntas?
c) E se os parceiros (3 pares) já estão fixados anteriormente?

12. De quantos modos é possível dispor 12 convidados em volta de uma mesa redonda? E, sabendo-se que são 6 homens e 6 mulheres, ficando os homens e as mulheres alternados?

## Sequência 4

1. De quantas maneiras posso decompor 72 no produto de 2 inteiros positivos?

2. Seja $A = \{2, 3, 5, 7, 9, 13\}$ e $B = \{a \times b \mid a \in A, b \in A, a \neq b \text{ e } a \times b \text{ tem 2 algarismos}\}$

a) Quantos elementos possui B?
b) Quantos são pares?
c) E incluindo o caso $a = b$?

3. Seja $A = \{2, 3, 5, 6, 9, 13\}$ e $B = \{a^b \mid a \in A, b \in B \text{ e } a \neq b\}$

a) Quantos elementos possui B?
b) Quantos desses são pares?
c) E incluindo o caso $a = b$?

4. De quantas maneiras uma criança pode formar, simultaneamente, um número de 4 algarismos, um de 3 e um de 2, com seu jogo de 9 cubos, numerados de 1 a 9?

5. Uma classe de 45 alunos deve ser dividida em equipes de 5 alunos para realizar um trabalho de Filosofia. De quantas maneiras a divisão pode ser feita sabendo-se que:

a) todas as equipes desenvolverão o mesmo tema?
b) cada equipe desenvolverá um tema diferente?

6. Para compor a tripulação de um avião dispomos de 20 pilotos, 4 co-pilotos, 3 aeromoças e 5 comissários de bordo. Sabendo-se que em cada vôo vão 2 aeromoças, 2 comissários, 1 piloto e 2 co-pilotos, de quantos modos pode ser escolhida a tripulação?

7. Sejam A, B e C pontos da reta r
A, D e E pontos da reta s
B, D e F pontos da reta t
C, E e F não alinhados.

a) Quantos triângulos existem, com vértices em 3 desses pontos?
b) Quantas retas estão determinadas por esses pontos?

8. Para o grêmio de um colégio foram eleitos 6 rapazes e 4 moças. Dizer quantas comissões de 5 pessoas se podem formar, de modo que:

a) em cada comissão figurem 2 moças.

b) em cada comissão figurem, no máximo, 2 moças.

9. Provar que $\binom{n+1}{p} - \binom{n}{p-1} = \binom{n}{p}$.

10. Dado um conjunto A de n objetos, sabe-se que os números de combinações desses objetos 4 a 4, 5 a 5 e 6 a 6 estão em **progressão aritmética**, nessa ordem. Determinar n.

11. O número de arranjos de n elementos, 3 a 3 e o número de arranjos n + 1 elementos, 4 a 4, são termos consecutivos de uma **progressão geométrica** de razão 8.

a) Determinar n.

b) Determinar o primeiro termo sabendo-se que os números dados são, respectivamente, o 5º e o 6º termos da progressão.

12. Um conjunto tem k elementos. O número de seus subconjuntos de p elementos é 136 e o número de seus subconjuntos ordenados de p elementos distintos é 272. Determinar k e p.

13. Verificar a identidade: $C_{n,3} + C_{n+1,3} = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

14. Demonstrar que o número de combinações simples de n elementos, p a p, que contêm um determinado elemento é:

$$\frac{p \cdot C_{n,p}}{n}$$

15. De quantas maneiras podemos permutar as letras de uma palavra formada por n consoantes e n vogais, de modo que não haja 2 consoantes nem 2 vogais consecutivas?

16. O número de combinações de 12 elementos, 2n a 2n, é igual ao número de combinações de 12 elementos, n + 6 a n + 6. Determinar n.

# TEORIA DAS PROBABILIDADES

## 28. EVENTOS – ESPAÇO AMOSTRAL

**28.1.** Consideremos as seguintes **condições iniciais:** *5 bolas vermelhas, numeradas de 1 a 5, são colocadas em uma urna e uma bola será sorteada.*

**28.1.1.** Considere o seguinte **experimento**: *"anotar a cor da bola sorteada".*

O resultado do experimento está determinado a partir das condições iniciais? ....Sim........ (sim ou não). O único resultado possível é "vermelha"............... .

Experimentos como este são chamados **determinísticos** e o resultado é o **evento certo.**

**28.1.2.** Considere o **experimento**: *"anotar se a cor da bola sorteada é branca".*

Este experimento é determinístico?

.......Sim...... (sim ou não). Qual é o **evento certo**, para este experimento? A bola sorteada não é branca.......

O evento: *"a bola sorteada é branca"* é chamado **evento impossível.**

**28.1.3.** Considere o **experimento**: *"anotar se a bola 5 é sorteada".*

Este experimento é **determinístico?**

......Não...... (sim ou não). Por quê? Porque 5 não é o único resultado possível.

Neste caso, o resultado não está perfeitamente determinado a partir das condições iniciais. Diz-se então que o **experimento é aleatório** e que o evento *"a bola sorteada é a de nº 5"* é um **evento aleatório.**

**28.1.4.** Verifique o seguinte experimento: *"anotar o número da bola sorteada"*, e os eventos:

a) a bola sorteada é de nº par.
b) a bola sorteada tem número menor que 5.
c) a bola sorteada tem número menor que 6.
d) a bola sorteada tem número ímpar.
e) a bola sorteada tem número maior que 7.
f) a bola sorteada é a de nº 1.

O experimento é ...aleatório............ porque o resultado não está perfeitamente determinado a partir das
(determinístico ou aleatório)
condições iniciais.

Os eventos (a), (b), (d), (f), são eventos aleatórios; o evento (c) é evento certo porque é o único resultado possível e o evento (e) é evento impossível porque nunca a bola sorteada terá número maior que 7.

**28.1.5.** Escreva outros exemplos de eventos aleatórios para o experimento do ítem anterior.

1º) A bola sorteada é a de nº 3.

2º) A bola sorteada tem nº menor que 3.

3º) A bola sorteada tem nº maior que 3.

Escreva um exemplo de evento certo e um exemplo de evento impossível para este experimento.

A bola sorteada tem nº menor que 7.

A bola sorteada é a de nº 8.

**28.1.6.** Considere o seguinte experimento: *"anotar o número da bola sorteada"*.

Os possíveis resultados deste experimento podem ser representados pelo conjunto:

E = { 1, 2, 3, 4, 5},

que chamaremos espaço amostral do experimento.

Se considerarmos o evento: *"a bola sorteada é de número par"*, podemos representá-lo pelo conjunto {2, 4}⊂E.

Os eventos aleatórios: *"a bola sorteada tem número menor que 5"*, *"a bola sorteada tem número ímpar"*, *"a bola sorteada é a de número 1"*, também podem ser representados por subconjuntos do espaço amostral:

{1, 2, 3, 4} e {1, 3, 5} e {1}

O evento: *"a bola sorteada tem número menor que 6"* é o evento certo e pode ser representado pelo conjunto E. Observe que E⊂E.

O evento: *"a bola sorteada tem número maior que 7"*, é o evento impossível e será representado pelo conjunto vazio, que também é subconjunto de E ($\phi \subset$ E).

Assim, qualquer resultado do experimento pode ser representado por um subconjunto de seu espaço amostral.

**28.1.7.** Escreva os subconjuntos de E que representam os eventos do ítem 28.1.5.

{3} ; {1, 2} ; {4, 5} ; E ; $\phi$

**28.2.** Considere o experimento que consiste na retirada de uma bola de uma urna que contém uma bola vermelha, uma bola azul e uma bola branca.

Representando, respectivamente por **V, A** e **B**, as bolas da urna, o espaço amostral do experimento é:

E = { V , A , B }

**28.2.1.** Os eventos aleatórios representados por subconjuntos unitários de E são:

a) a bola retirada é vermelha: {V}⊂E.

b) a bola retirada é azul: {A}⊂E.

c) a bola retirada é branca: {B}⊂E

Estes eventos são chamados **eventos elementares** associados ao espaço amostral E.

**28.2.2.** Os eventos aleatórios representados por subconjuntos de E com dois elementos são:

a) a bola retirada não é vermelha: { A , B } ⊂E.

b) a bola retirada é vermelha ou azul : { V, A} ⊂E.

c) a bola retirada não é azul : { V , B } ⊂E.

**28.2.3.** O evento certo é representado pelo próprio conjunto E e pode ser descrito por:

*"a bola retirada é vermelha ou azul ou branca".*

**28.2.4.** O evento impossível é representado por $A \cap B = \phi$ ⊂E e pode ser descrito por:

*"a bola retirada é preta".*

Escreva outra sentença que também descreva o evento impossível:

" a bola retirada é amarela "

**28.2.5.** O conjunto de todos os eventos associados ao espaço amostral E é:

{ϕ, {V}, {A}, {B}, {A,B}, {V,A}, {V,B}, E }

que é o conjunto das partes de E, representado por *P*(E).

O número de eventos associados ao espaço amostral E é 8 = $2^3$, enquanto que o número de elementos de E é 3 .

**28.3.** Resumindo as noções dos ítens 28.1. e 28.2. podemos dizer que, dado um experimento aleatório:

a) **Espaço amostral** do experimento é o conjunto dos possíveis resultados deste experimento.

b) Um **evento** associado a um experimento aleatório é um subconjunto do espaço amostral.

c) **Eventos elementares** associados ao experimento são os eventos aleatórios representados por subconjuntos unitários de E.

d) **O conjunto de todos os eventos** associados a um experimento é o conjunto das partes de E: *P*(E).

e) O **evento certo** e o **evento impossível** de um dado experimento, são representados pelos subconjuntos E e ϕ do espaço amostral E respectivamente.

**Obs.:** Sejam A, B ⊂E eventos, tais que A ∪ B = ϕ. Diremos então que A e B são **eventos mutuamente exclusivos.**

## 28.4. FAÇA VOCÊ – TAREFA 21

1. Consideremos o experimento que consiste no lançamento de um dado.

a) O **espaço amostral** do experimento é: E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }.

b) O evento: *"o resultado do lançamento é número ímpar"*, é representado pelo conjunto A ⊂E, onde A = { 1, 3, 5 }.

c) O evento: *"o resultado do lançamento é um número primo"*, é representado por B ⊂E, onde B = { 2, 3, 5 }.

d) O evento A∩B = { 3, 5 } pode ser descrito pela sentença: "o resultado do lançamento é ímpar e primo ".

e) O evento A∪B = { 1, 2, 3, 5 } pode ser descrito pela sentença: "o resultado é ímpar ou primo ".

f) Representando por $\bar{B}$ o conjunto E – B, isto é, o complementar de B em E, temos: $\bar{B}$ = {1, 4, 6}
$\bar{B}$ é um evento de E que pode ser descrito por: "o resultado do lançamento não é primo ".

g) O evento $\bar{A}$ = { 2, 4, 6 } pode ser descrito por: " o resultado do lançamento é par ".

h) O conjunto de todos os eventos do experimento é o conjunto *P*(E) que tem $2^6$ elementos.

2. Considere o experimento que consiste no lançamento de uma moeda, duas vezes consecutivas.

Representando por c o evento: "ocorrência de cara", por c' o evento "ocorrência de coroa" e por um par ordenado os resultados das duas jogadas, temos o espaço amostral:

$$E = \{ (c, c), (c, c'), (c', c), (c', c') \}$$

a) O evento "ocorrência de uma cara" é representado por $A \subset E$ onde:

$$A = \{(c, c), (c, c'), (c', c) \}$$

Observe: *"ocorrência de uma cara"* significa *"ocorrência de pelo menos uma cara"*.

b) O evento *"ocorrência de uma única cara"* é representado por $B \subset E$ onde:

$$B = \{ (c, c'), (c', c) \}$$

c) O evento *"ocorrência de pelo menos uma coroa"* é representado por $C \subset E$, onde:

$$C = \{ (c, c'), (c', c), (c', c') \}$$

d) O evento *"ocorrência de duas coroas"* é representado por $F \subset E$, onde:

$$F = \{ (c', c') \}$$

e) O evento $A \cap C = \{ (c, c'), (c', c) \}$ pode ser descrito por: "ocorrência de uma cara e uma coroa".

f) O evento $B \cup F = \{ (c, c'), (c', c), (c', c') \}$ pode ser descrito por: "ocorrência de pelo menos uma coroa".

g) O evento $\bar{A} = \{ (c', c') \}$ pode ser descrito por: "ocorrência de duas coroas".

h) O conjunto de todos os eventos é o conjunto $\mathcal{P}(E)$ que tem $2^4$ elementos

3. Considere um experimento cujo espaço amostral é E e considere dados três eventos: $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$.

a) O evento $\bar{B}$ pode ser descrito por: *"o evento B não ocorre"*

b) O evento $\bar{C}$ pode ser descrito por: "o evento C não ocorre".

c) O evento descrito por *"B não ocorre e C também não ocorre"* pode ser representado pelo conjunto $\bar{B} \cap \bar{C}$

d) O evento *"somente A ocorre"*, pode ser representado por: $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

e) O evento: *"os três eventos dados ocorrem"*, pode ser representado por: $A \cap B \cap C$

f) Se pelo menos dois dos eventos dados ocorrem, o evento pode ser representado por: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

g) Se A e B ocorrem mas C não ocorre, o evento pode ser representado por: $A \cap B \cap \bar{C}$

h) Se somente dois dos eventos dados ocorrem, o evento pode ser representado por:

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \cup (B \cap C \cap \bar{A})$$

i) Se somente um dos eventos dados ocorre, o evento pode ser representado por:

$$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B})$$

j) Se nenhum dos eventos dados ocorre, o evento pode ser representado por: $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

## 29. PROBABILIDADE

**29.1.** Considere o seguinte experimento: *"uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 bolas brancas, todas de mesmo tamanho. Uma bola será sorteada".*

O evento certo associado a este experimento pode ser descrito por: "a bola sorteada será vermelha ou branca.

Escreva uma sentença que descreva o evento impossível: "a bola sorteada será azul".

Os eventos: V, *"a bola sorteada é vermelha"* e B, *"a bola sorteada é branca"* são eventos aleatórios.

Devido ao número de bolas de cada cor, podemos dizer que o evento ...V... tem maior chance que o evento ..B..

O objetivo da **teoria das probabilidades** é exprimir matematicamente a chance de cada evento aleatório associado a um experimento.

## 29.2. FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

Considere um experimento cujo espaço amostral é E. O conjunto de todos os eventos associados a E é o conjunto ...das partes de E... .

Um conjunto A é um evento de E $\Longleftrightarrow$ ...$A \subset E$... . O conjunto E representa o evento ...certo... e o conjunto $\phi$ representa o ...evento impossível... .

Consideremos uma função P, que chamaremos função probabilidade, associada ao experimento, definida por:

$$P: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$A \longmapsto y = P(A)$$

com as seguintes propriedades:

1) $P(A) \geqslant 0, \ \forall A \subset E.$

2) $P(E) = 1$ e $P(\phi) = 0$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \phi$

## 29.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 22

1. Considerando o experimento do ítem 29.1, temos:

$$E = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, B_1, B_2, B_3\}.$$

a) O evento V é representado pelo subconjunto de E, $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ e o evento B é representado por $B = \{B_1, B_2, B_3\}$.

O evento $V \cup B$ é o **evento certo** porque $V \cup B = E$ e pode ser descrito por: *"a bola sorteada é* ...vermelha... *ou* ...branca... *"*.

b) A probabilidade do evento $V \cup B$ é $P(E) = P(V \cup B) =$ ...1... pela propriedade (2) da definição de P.

c) A probabilidade do evento: "a bola sorteada é azul" é ...0... porque este é o evento ...impossível..., representado pelo conjunto ...vazio... .

d) O conjunto E pode ser representado pela reunião dos eventos elementares:

$$E = \{V_1\} \cup \{V_2\} \cup \{V_3\} \cup \{V_4\} \cup \{V_5\} \cup \{B_1\} \cup \{B_2\} \cup \{B_3\}.$$

e estes são, dois a dois, disjuntos.

Supondo que: $P(\{V_1\}) = p_1$, $P(\{V_2\}) = p_2$, $P(\{V_3\}) = p_3$, $P(\{V_4\}) = p_4$, $P(\{V_5\}) = p_5$,
$P(\{B_1\}) = q_1$, $P(\{B_2\}) = q_2$, $P(\{B_3\}) = q_3$,

concluímos, pela propriedade (3) da definição de P:

$$P(E) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + q_1 + q_2 + q_3.$$

Se todas as bolas são iguais, podemos supor que elas tenham chances iguais de serem sorteadas. Isto significa, matematicamente, definir:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = q_1 = q_2 = q_3 =$$

Como $P(E) = 1$, temos:

$$p_i = \frac{1}{8} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$q_j = \frac{1}{8} \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

e) O evento V também pode ser visto como reunião de eventos elementares. Assim, a probabilidade de que a bola sorteada seja vermelha é $P(V) = \frac{5}{8}$

Do mesmo modo podemos concluir: $P(B) = \frac{3}{8}$

2. Considere o experimento: *"Três pessoas A, B e C jogam uma partida de certo jogo de cartas. Queremos saber quem será vencedor".*

O espaço amostral do experimento é: $E = \{ A, B, C \}$

Suponhamos que, pelos resultados de outras partidas disputadas pelas mesmas pessoas, sabe-se que a pessoa B tem o dobro da chance da pessoa A e que a pessoa C tem o triplo da chance de A.

Matematicamente, isto pode ser representado por: $P(B) = 2P(A)$ e $P(C) = 3P(A)$

a) Calcular P(A), P(B) e P(C).

Temos: $E = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \Longrightarrow P(E) = P(A) + P(B) + P(C)$ ou, escrevendo em função de P(A):

$$P(E) = P(A) + 2P(A) + 3P(A) = 6P(A)$$

Como $P(E) = 1$, temos:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{2}{6} \quad \text{e} \quad P(C) = \frac{3}{6}$$

b) Calcular a probabilidade de que a pessoa A perca o jogo (isto é, B ou C ganhem o jogo).

Este evento pode ser representado pelo conjunto $B \cup C$, cuja probabilidade é:

$$P(B \cup C) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$ pela propriedade (3) da definição.

c) Qual a probabilidade de que B ou A ganhe o jogo?

Este evento pode ser representado pelo conjunto $B \cup A$, cuja probabilidade é:

$$P(B \cup A) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

## 30. PROPRIEDADES

**30.1.** Consideremos um experimento cujo espaço amostral é o conjunto:

$$E = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}.$$

Os eventos elementares do experimento:

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\},$$

são mutuamente exclusivos, dois a dois, isto é:

$$\{a_i\} \cap \{a_j\} = \phi, \quad \forall i, j \quad \text{com} \quad i \neq j.$$

Então, sendo

$$E = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\},$$

temos pela propriedade (3) da definição de P:

$$P(E) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \ldots + P(\{a_n\})$$

Escrevendo abreviadamente $P(\{a_i\}) = P(a_i)$, temos:

$$P(E) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n)$$

ou

$$P(E) = \sum_{a_i \in E} P(a_i)$$

Pela propriedade (2) da definição podemos escrever,

$$\boxed{\sum_{a_i \in E} P(a_i) = 1}$$

Isto significa que a soma das probabilidades de todos os eventos elementares do espaço amostral de um experimento é sempre igual a ...1... .

**30.2.** Considerando um evento $A \subset E$

$$E = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$$

$$A = \{ b_1, b_2, \ldots, b_k \}, \quad k \leqslant n$$

onde os $b_i$ são elementos de E, isto é, para cada i, $\exists j$ tal que $b_i = a_j$.

Pelo mesmo raciocínio do ítem anterior podemos escrever:

$$P(A) = \underline{P(b_1)} + \underline{P(b_2)} + \ldots\ldots + \underline{P(b_k)}$$

ou seja:

$$\boxed{P(A) = \sum_{b_i \in A} P(b_i)}$$

**30.3.** Como $A \subset E$, temos:

$$\sum_{b_i \in A} P(b_i) \leqslant \sum_{a_i \in E} P(a_i)$$

ou seja:

$$\boxed{P(A) \leqslant 1, \quad \forall A \subset E}$$

Isto é, a probabilidade de qualquer evento é sempre menor ou igual a 1.

Pelo mesmo raciocínio, $\phi \subset A \Longrightarrow P(\phi) \leqslant P(A) \Longrightarrow$ $\boxed{P(A) \geqslant 0, \quad \forall A \subset E}$

**30.4. EVENTOS ELEMENTARES EQUIPROVÁVEIS**

Consideremos o espaço amostral

$$E = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$$

e suponhamos que: $P(a_i) = P(a_j), \quad \forall i, j,$

isto é, suponhamos que os eventos elementares são equiprováveis.

Portanto temos:

$$\sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 1$$

e como, por hipótese, todos os termos da soma são iguais, temos:

$$n \cdot P(a_i) = \ldots 1 \ldots$$

ou seja, a probabilidade de cada evento elementar é $P(a_i) = \frac{1}{n}$

Consideremos agora um evento $A \subset E$

$$A = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \quad k \leqslant n$$

Por 30.2., temos:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(b_i)$$

e, como todos os termos da soma são iguais a $\frac{1}{n}$, concluimos:

$$P(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Ou, como n é o número de elementos do espaço amostral E, n(E); e k é o número de elementos do evento A, n(A); concluímos que:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}}$$

## 30.5. FAÇA VOCÊ – TAREFA 23

Considere o lançamento de um dado.

O espaço amostral é:

$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Admita que o dado seja perfeito, isto é, qualquer face tenha a mesma chance de ocorrer.

Então os eventos elementares são ...equiprováveis.........

a) A probabilidade de ocorrência do nº 6 é:

$$P(6) = \frac{1}{6}$$

b) Considerando o evento A: *"ocorrencia de número par".*

$$A = \{ 2, 4, 6 \}$$

Então a probabilidade de ocorrência de A é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) A probabilidade de ocorrência do evento B: *"ocorrência de múltiplo de 3".*

$$B = \{ 3, 6 \}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

d) A probabilidade do evento $A \cup B$: *"ocorrência de* ...número par........... *ou* ...múltiplo de 3.........."*.*

$$A \cup B = \{ 2, 3, 4, 6 \}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Observe que A e B não são mutuamente exclusivos porque $A \cap B = \{ 6 \} \neq \phi$ e, $P(A \cup B)$ .......≠........ $P(A) + P(B)$.
(= ou ≠)

e) A probabilidade do evento $A \cap B$: *"ocorrência de* ...número par.............. *e* ...múltiplo de 3..........................

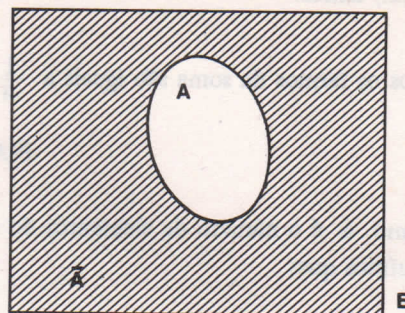
$$A \cap B = \{ 6 \}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

### 30.6. PROBABILIDADE DO EVENTO COMPLEMENTAR

Considere o espaço amostral E e o evento $A \subset E$. Seja $\overline{A}$ o complementar de A em E, isto é, $\overline{A} = E - A$

Temos:

$A \cup \overline{A} = E$ e $A \cap \overline{A} = \phi$

A e $\overline{A}$ são eventos mutuamente exclusivos e, pela propriedade (3) da definição de P:

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

Por outro lado, pela propriedade (2):

$$P(A \cup \overline{A}) = P(E) = 1$$

Logo concluímos que:

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

**Exemplo:** Veja, no lançamento de um dado, o evento **C:** *"não ocorrência de 6"* é complementar do evento *"ocorrência de 6"*.

Logo:

$$P(C) = 1 - P(6)$$

$$P(C) = \frac{5}{6}$$

### 30.7. PROBABILIDADE DO EVENTO DIFERENÇA DE DOIS EVENTOS DADOS

Consideremos o espaço amostral E e dois eventos $A \subset E$ e $B \subset E$.

Queremos calcular a probabilidade do evento $A - B$, isto é, ocorrência de A e não ocorrência de B.

Acompanhando a figura, você pode escrever o evento A como reunião de dois eventos mutuamente exclusivos:

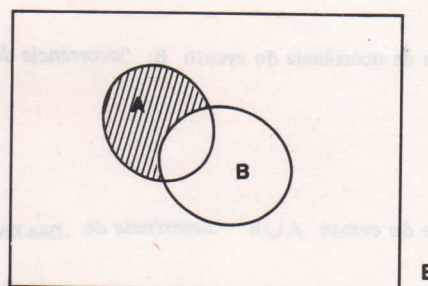
$(A - B) \cup (A \cap B) = A$

onde: $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$

Então pela propriedade (3) da definição de **P:**

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

e portanto:

$$\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

Observe, a probabilidade de que, no lançamento de um dado, *"ocorra um número par que não é múltiplo de 3"* é o evento $A - B$ (com a notação do ítem 30.5.).

Temos:

$A = \{ 2 , 4 , 6 \}$

$B = \{ 3 , 6 \}$

$A \cap B = \{ 6 \}$ ; $A - B = \{ 2 , 4 \}$

Calculando diretamente, $P(A - B) = \dfrac{n(A - B)}{n(E)} = \dfrac{2}{6}$

Usando o resultado $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ temos:

$$P(A - B) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

## 30.8. PROBABILIDADE DA REUNIÃO DE DOIS EVENTOS

Consideremos o espaço amostral E e dois eventos, $A \subset E$ e $B \subset E$.

Queremos calcular a probabilidade do evento $A \cup B$.

Acompanhando a figura você pode escrever o evento $A \cup B$ como reunião de dois eventos mutuamente exclusivos:

$$A \cup B = B \cup (A - B)$$

onde $(A - B) \cap B = \phi$

Então, pela propriedade (3) da definição,

$P(A \cup B) =$ ...P(B)... + ...P(A - B)...

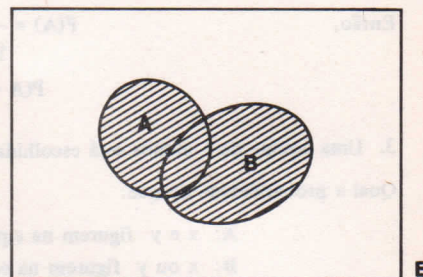
Mas, sabemos que: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

e, por substituição, concluímos que:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Veja, baseando-se ainda nos dados do ítem 30.5. podemos calcular:

$P(A) = \dfrac{3}{6}$ $P(B) = \dfrac{2}{6}$ $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ $P(A \cup B) = \dfrac{4}{6}$

Observe que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 31. FAÇA VOCÊ – TAREFA 24

1. Uma moeda será lançada duas vêzes. Calcular a probabilidade de que:

   A: não ocorra "cara" nenhuma vez.
   B: ocorra "cara" na primeira ou na segunda jogada.

   O espaço amostral do experimento é:

   $E = \{$ (c, c), ...(c, c')..., ...(c', c)..., ...(c', c')... $\}$ onde n(E) = ...4...

Como os eventos elementares são equiprováveis, a probabilidade de qualquer evento será o quociente, entre o número de elementos do evento e o número de elementos de E.

Os eventos são: $A = \{$ ...(c', c')... $\}$ e $B = \{$ ...(c, c')..., ...(c', c)... $\}$

Logo: $P(A) = \dfrac{1}{4}$ e $P(B) = \dfrac{2}{4}$

2. Fez-se uma pesquisa consultando 100 pessoas que falam francês ou inglês e obteve-se o seguinte resultado:

   A: 40 pessoas falam francês.
   B: 70 pessoas falam inglês.

Escolhendo-se uma das 100 pessoas, ao acaso, qual a probabilidade de que ela fale frances mas não fale inglês?

O espaço amostral do experimento é o conjunto das pessoas consultadas.

$$E = \{p_1, p_2, \ldots, p_{100}\}$$

Representando-se por $a_i$ as pessoas que falam francês e por $b_i$ as pessoas que falam inglês, temos:

$A = \{a_1,$ ...$a_2$..., ..., ...$a_{40}$...$\}$

$B = \{b_1,$ ...$b_2$..., ..., ...$b_{70}$...$\}$

O conjunto das pessoas que falam francês mas não falam inglês é o conjunto A..... - ..B.... .

Sabemos que:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Temos:

$n(A \cup B) = 100$

$n(A) = 40$ $\Longrightarrow n(A \cap B) = 10$

$n(B) = 70$

Então, $P(A) = \frac{40}{100}$ e $P(A \cap B) = \frac{10}{100}$

$$P(A - B) = \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

3. Uma equipe de 5 alunos será escolhida, ao acaso, em uma classe de 10 alunos. x e y são dois alunos dessa classe.

Qual a probabilidade de que:

A: x e y figurem na equipe?

B: x ou y figurem na equipe?

Representando por $a_i$ os alunos da classe, o resultado do experimento é um conjunto de 5 alunos, isto é, uma das combinações de 5 elementos tirados de um conjunto de 10.

$$E = \{(a_1a_2a_3a_4a_5), (a_1a_3a_4a_5a_6), \ldots\}$$

$$n(E) = C_{10,5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

a) O evento $A \subset E$ contém as combinações dos 10 elementos tomados 5 a 5 que contém x e y.

$$n(A) = C_{8,3} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

$$P(A) = \frac{56}{252} = \frac{2}{9}$$

b) Chamando X o evento *"o aluno x figura na equipe"*

$$n(X) = C_{9,4} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126$$

$$P(X) = \frac{126}{252} = \frac{1}{2}$$

Chamando Y o evento: *"o aluno y figura na equipe"*.

$$n(Y) = C_{9,4} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126$$

$$P(Y) = \frac{126}{252} = \frac{1}{2}$$

Como $B = X \cup Y$ e $A = X \cap Y$, temos:

$$P(B) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(A)$$

$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

## 32. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Considerando o experimento que consiste no lançamento de dois dados:

a) Construir o espaço amostral.

b) Escrever o evento **A: a soma dos pontos é ímpar.**

c) Escrever o evento **B: a soma dos pontos é maior que 6.**

d) Escrever o evento **C: os resultados dos dois dados são iguais.**

e) Escrever e interpretar os eventos: $B \cap C$, $A \cap B$, $B \cup C$, $\overline{A \cap B}$ e $\overline{C}$.

f) Determinar o número de elementos de cada conjunto dos ítens anteriores.

2. Considerar o experimento que consiste na retirada, ao acaso, de uma carta de um baralho de 52 cartas.

a) Construir o espaço amostral e calcular o número de seus elementos.
b) Escrever o evento A: **a carta retirada é um ás.**
c) Escrever o evento B: **a carta retirada é um ás ou uma carta de paus.**
d) Escrever e interpretar os eventos $\overline{B}$ e $\overline{A}$.

3. Considerar o lançamento de três moedas.

a) Construir o espaço amostral e calcular o número de elementos.
b) Escrever o evento A: **ocorre, pelo menos, uma cara.**
c) Escrever o evento B: **ocorre, no máximo, uma cara.**
d) Escrever e interpretar o evento $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

4. Considerar o lançamento de 4 moedas.

a) Construir o espaço amostral.
b) Escrever o evento A: **o número de caras é igual ao número de coroas.**
c) Escrever o evento B: **ocorrem no máximo 3 caras.**
d) Escrever o evento C: **ocorre, pelo menos, uma coroa.**
e) Determinar o conjunto $P(E)$.

## Sequência 2

1. Uma carta será retirada, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de que a carta retirada seja uma dama ou uma carta de copas?

2. Uma letra é escolhida, ao acaso, da palavra **ACASO.**
a) Qual a probabilidade de que a letra seja A?
b) Qual a probabilidade de que a letra seja uma vogal?

3. Um inteiro entre 3 e 11 será escolhido ao acaso.
a) Qual a probabilidade de que este número seja ímpar?
b) Qual a probabilidade de que este número seja ímpar e divisível por 3?

4. Uma família é escolhida dentre as famílias que têm exatamente 2 filhos.
a) Qual a probabilidade de que tenha 2 meninos?
b) Qual a probabilidade de que tenha 2 meninos, visto que o mais velho é menino?

5. Uma urna contém 20 bolas brancas e 10 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de se extrair 2 bolas brancas, sucessivamente, sem reposição?

6. No lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda, qual a probabilidade de se obter 5 no dado e cara na moeda?

7. Retiram-se 2 cartas de um baralho de 52 cartas, sem haver reposição da primeira carta antes de retirar a segunda. Qual a probabilidade de se obter 2 ases?

8. Se n homens, entre os quais estão A e B, fazem uma fila, qual é a probabilidade que entre A e B haja exatamente r homens?

9. Permutando-se as letras da palavra **PERNAMBUCO**, e, escolhendo-se um dos anagramas, ao acaso, qual é a probabilidade de este começar por consoante e terminar por vogal?

10. Se 10 pessoas estão sentadas a uma mesa circular, ao acaso, qual a probabilidade de que duas determinadas pessoas se sentem juntas?

11. Qual a probabilidade de que, numa classe de 30 alunos, pelo menos 2 aniversariem no mesmo dia?

12. Qual a probabilidade de se obter o ás de ouro, o rei de espadas e a dama de copas, extraindo 3 cartas de um baralho de 52 cartas, na ordem indicada, sem reposição?

13. Um colégio tem **500** estudantes e sabe-se que: **300** estudam francês; **200** estudam alemão e **50** estudam inglês. Sabe-se ainda que **20** estudam francês e inglês; **30**, alemão e inglês; **20**, alemão e francês e **10**, as três línguas.

Se um estudante é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de ser:
a) estudante de duas, e somente duas, línguas?
b) estudante de, no mínimo, uma língua?
c) estudante de alemão, sabendo-se que ele estuda francês?

# MATRIZES E DETERMINANTES

## 33. MATRIZES

**33.1. Considere os conjuntos $I = \{1, 2, 3\}$ e $J = \{1, 2\}$ e seu produto cartesiano:**

$$I \times J = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

**Considere, agora, a função que associa a cada par $(i, j) \in I \times J$, o número real $i + j$.**

**Isto é,**

$$f: I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(i, j) \longmapsto i + j$$

**Enumere todos os elementos do conjunto imagem desta função, colocando-os em uma tabela de dupla entrada:**

| I \ J | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 |

**Esta função é chamada *uma* matriz real de ordem 3 por 2, definida pela lei $(i, j) \longmapsto i + j$.**

**Seu domínio é o conjunto:**

$I \times J = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

**Representando $f((i, j))$ por $a_{ij}$, temos:**

$a_{11} = f((1, 1)) = 2$ $\qquad a_{12} = f((1,2)) = 3$

$a_{21} = f((2,1)) = 3$ $\qquad a_{22} = f((2,2)) = 4$

$a_{31} = f((3,1)) = 4$ $\qquad a_{32} = f((3,2)) = 5$

**Observe que definimos uma determinada matriz. Outras leis definirão outras matrizes.**

## 33.2. FAÇA VOCÊ — TAREFA 25

**1. Defina uma matriz real de ordem 4 por 3.**

$I = \{1, 2, 3, 4\}$ e $J = \{1, 2, 3\}$

$f: I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$
$(i, j) \longmapsto i \cdot j$

(Escolha a lei de formação. Por exemplo, $i \cdot j$).

Enumerando todos os elementos do conjunto em uma tabela de dupla entrada:

| I \ J | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 4 | 6 |
| 3 | 3 | 6 | 9 |
| 4 | 4 | 8 | 12 |

Temos:

$a_{11} = 1$ $a_{12} = 2$ $a_{13} = 3$

$a_{21} = 2$ $a_{22} = 4$ $a_{23} = 6$

$a_{31} = 3$ $a_{32} = 6$ $a_{33} = 9$

$a_{41} = 4$ $a_{42} = 8$ $a_{43} = 12$

A tabela de dupla entrada, que representa as imagens de uma matriz de ordem 4 por 3, tem ...quatro... linhas e ...três... colunas.

**33.3.** Você pode observar que a matriz f do ítem 33.1. fica bem determinada apenas pelo seu conjunto imagem desde que seus elementos estejam dispostos **ordenadamente** em 3 linhas e 2 colunas.

O conjunto $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

indica uma função definida em $I \times J$ onde $I = \{1, 2, 3\}$ porque temos ...três... linhas e $J = \{1, 2\}$ porque temos ...duas... colunas.

A função tem valores em **R** porque todos os números que figuram no conjunto imagem são ...reais...

A função está bem definida porque sabemos qual é sua imagem para cada elemento do domínio ...$I \times J$...

Assim,

– a imagem de (1, 1) é $a_{11}$ = ...2... porque 2 está na 1ª linha e 1ª coluna.
– a imagem de (1, 2) é ...$a_{12} = 3$... porque ...3 está na 1ª linha e 2ª coluna... .
– a imagem de (2, 1) é ...$a_{21} = 3$... porque ...3 está na 2ª linha e 1ª coluna... .
– a imagem de (2, 2) é ...$a_{22} = 4$... porque ...4 está na 2ª linha e 2ª coluna... .
– a imagem de (3, 1) é ...$a_{31} = 4$... porque ...4 está na 3ª linha e 1ª coluna... .
– a imagem de (3, 2) é ...$a_{32} = 5$... porque ...5 está na 3ª linha e 2ª coluna... .

## 33.4. DEFINIÇÃO

Seja: $I = \{i \in N \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ e $J = \{j \in N \mid 1 \leqslant j \leqslant m\}$

> *Chama-se* **matriz real de ordem n por m,** *qualquer função:*
>
> **M: I×J ⟶ R**

## 33.5. DOMÍNIO E CONJUNTO–IMAGEM

**33.5.1.** Uma matriz de ordem 4 por 3 pode ser dada por seu conjunto imagem:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

cujos elementos estão dispostos em ...4... linhas e ...3... colunas.

Seu domínio é o conjunto I × J, onde I = { 1, 2, 3, 4 } e J = { 1, 2, 3 }.

– $a_{32}$ é o elemento da 3ª linha e 2ª coluna, isto é, é a imagem de ( 3 , 2 ).

– $a_{23}$ é o elemento da 2ª linha e 3ª coluna, isto é, é a imagem de ( 2 , 3 ).

– $a_{ij}$ é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna, isto é, é a imagem de ( i , j ).

**33.5.2.** Uma matriz de ordem n por m pode ser dada por seu conjunto imagem:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

cujos elementos estão dispostos em n linhas e m colunas.

Seu domínio é o conjunto I × J, onde:

I = { 1, 2, ..., n } e J = { 1, 2, ..., m }

Pode-se usar a notação abreviada:

$$M = (a_{ij})_{n \times m}$$

que se lê: "matriz $a_{ij}$ de ordem n por m" ou "matriz M de ordem n por m".

**33.5.3.** O domínio da matriz $A = (a_{ij})_{2\times3}$ é o conjunto I × J, onde: I = { 1, 2 } e J = { 1, 2, 3 }.

No símbolo $a_{ij}$, i é uma variável que pode assumir os valores 1 e 2 e j é uma variável que pode assumir os valores 1, 2 e 3 .

**33.6.** Uma matriz onde o número de linhas e o número de colunas são iguais a n, isto é, de ordem n por n, é chamada **matriz quadrada de ordem n.**

Numa matriz quadrada a diagonal formada pelos elementos $a_{ij}$ com i = j é chamada **diagonal principal** e a outra diagonal da matriz é chamada **diagonal secundária**.

## 33.7. FAÇA VOCÊ – TAREFA 26

1. Escrever a matriz de ordem 3 por 2, definida por $a_{ij} = (-1)^i \cdot j$.

A matriz deve ter 3 linhas e 2 colunas.

Os elementos da 1ª linha são: $a_{11} = (-1)^1 \cdot 1 = -1$, $a_{12} = (-1)^1 \cdot 2 = -2$

Os elementos da 2ª linha são: $a_{21} = (-1)^2 \cdot 1 = 1$ $a_{22} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$

Os elementos da 3ª linha são: $a_{31} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$ $a_{32} = (-1)^3 \cdot 2 = -2$

Então, a matriz procurada é:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Escrever a matriz de ordem 3 por 2, definida por:

$$\begin{cases} a_{ij} = 2^{i+j} & \text{se} \quad i = j \\ a_{ij} = i \cdot j & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

A matriz deve ter 3 linhas e 2 colunas.

Os elementos da 1ª linha são:

$$a_{11} = 2^{1+1} \quad (i = j = 1) \Longrightarrow a_{11} = 4$$

$$a_{12} = 1 \cdot 2 \quad (i \neq j) \Longrightarrow a_{12} = 2$$

Os elementos da 2ª linha são: $a_{21} =$ 2 . 1 = 2 $\quad a_{22} =$ $2^{2+2}$ = 16

Os elementos da 3ª linha são: $a_{31} =$ 3 . 1 = 3 $\quad a_{32} =$ 3 . 2 = 6

Então, a matriz é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 16 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Escrever a matriz de ordem 2 por 4, definida por:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{se } i = j \\ a_{ij} = -1, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Os elementos da 1ª linha são:
$a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = -1$ e $a_{14} = -1$
Os elementos da 2ª linha são
$a_{21} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = -1$ e $a_{24} = -1$.

Então, a matriz é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Escrever a matriz $M = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 2i + j - 1, & \text{se } i \neq j \\ a_{ij} = 0, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Os elementos da 1ª linha são: $a_{11} = 0$, $a_{12} = 3$ e $a_{13} = 4$
Os elementos da 2ª linha são: $a_{21} = 4$, $a_{22} = 0$ e $a_{23} = 6$
Os elementos da 3ª linha são: $a_{31} = 6$, $a_{32} = 7$ e $a_{33} = 0$

Então, a matriz é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

## 34. IGUALDADE DE MATRIZES

**34.1.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ambas têm o mesmo domínio, $I \times J$, onde: I = { 1, 2 } e J = { 1, 2, 3 }, porque temos duas linhas e tres colunas

Mas são funções distintas porque, para a matriz A, o elemento $a_{12} =$ 2 e para a matriz B, $b_{12} =$ −1 e portanto $a_{12} \neq b_{12}$ (isto é suficiente para que as funções não sejam iguais).

**34.2.** As matrizes

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad e \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

não são iguais, porque o domínio de E é:

$I \times J$, onde $I = \{1, 2, 3\}$ e $J = \{1, 2\}$

e o domínio de F é:

$I \times J$, onde $I = \{1, 2\}$ e $J = \{1, 2, 3\}$ $\Longrightarrow D(E) \neq D(F)$.

Logo, duas matrizes de ordens diferentes não podem ser iguais.

**34.3.** Podemos então concluir que duas matrizes de mesma ordem:

$$A = (a_{ij})_{n \times m} \quad e \quad B = (b_{ij})_{n \times m}$$

são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i \quad e \quad \forall j.$

$$\boxed{A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i \quad e \quad \forall j}$$

## 35. MATRIZ TRANSPOSTA

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$ de ordem 2 por 3 .

Obtenha, a partir de A, a matriz A', cujas linhas são as colunas da matriz A.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1/2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

A nova matriz A' é de ordem 3 por 2 .

Esta matriz é chamada matriz transposta da matriz A e é simbolizada por ${}^tA$.

Pondo: $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ e ${}^tA = (b_{ij})_{3 \times 2}$

temos:

$a_{11} = 1$ $\quad b_{11} = 1$

$a_{12} = 2$ $\quad b_{21} = 2$

$a_{13} = -5$ $\quad b_{31} = -5$

$a_{21} = 3$ $\quad b_{12} = 3$

$a_{22} = 1/2$ $\quad b_{22} = 1/2$

$a_{23} = 2$ $\quad b_{32} = 2$

isto é, $\forall i, \ \forall j, \ a_{ij} = b_{ji}$

Podemos, pois, definir:

> *A transposta da matriz* $M = (a_{ij})_{n \times m}$ *é a matriz* ${}^tM = (b_{ij})_{m \times n}$, *tal que*
>
> $a_{ij} = b_{ji}, \quad \forall i, \ \forall j$

## 35.1. FAÇA VOCÊ – TAREFA 27

1. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} \qquad e \qquad {}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ x-2 & y & 1 \\ 3y & 6-y & z \end{pmatrix}$$

determinar numericamente os elementos da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & 1 \\ 3 & z & z \end{pmatrix}$$

Temos então, comparando com a matriz ${}^{t}A$, dada,

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ x-2 & y & 1 \\ 3y & 6-y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & 1 \\ 3 & z & z \end{pmatrix}$$

A igualdade das matrizes implica nas seguintes igualdades:

a) $x - 2 = 2 \Longrightarrow x = 4$

b) $3y = 3 \Longrightarrow y = 1$

c) $6 - y = z \Longrightarrow z = 5$

Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$, definida por $a_{ij} = i - j$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, a transposta de A é:

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comparando A e sua transposta, temos: $\boxed{{}^{t}A = -A}$

Uma matriz que tem tal propriedade é chamada **matriz anti simétrica.**

3. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{4\times4}$, definida por $a_{ij} = i \cdot j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Então, a transposta de A é a matriz:

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Comparando A e sua transposta, temos: $\boxed{{}^{t}A = A}$

Uma matriz que tem tal propriedade é chamada **matriz simétrica.**

4. Se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 3-x & y & 3 \\ 2 & z-1 & x \end{pmatrix}$ é simétrica, quais os valores de x, y e z?

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3-x & 2 \\ 2 & y & z-1 \\ y & 3 & x \end{pmatrix}$$

Como A é simétrica:

$${}^tA = A \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3-x & 2 \\ 2 & y & z-1 \\ y & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 3-x & y & 3 \\ 2 & z-1 & x \end{pmatrix}$$

e portanto, temos as igualdades:

a) $3 - x = 2 \Longrightarrow$ $x = 1$

b) $z - 1 = 3 \Longrightarrow$ $z = 4$

c) $y = 2$

5. Se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2-x & \dots & \dots \\ x & y-1 & \dots \\ y & z & 2z+4 \end{pmatrix}$ é anti simétrica, quais os valores de x, y e z? Complete a matriz A.

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2-x & x & y \\ \dots & y-1 & z \\ \dots & \dots & 2z+4 \end{pmatrix}$$

Como A é anti simétrica,

$$A = -{}^tA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2-x & \dots & \dots \\ x & y-1 & \dots \\ y & z & 2z+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2-x) & -x & -y \\ \dots & -(y-1) & -z \\ \dots & \dots & -(2z+4) \end{pmatrix}$$

e portanto, temos as igualdades:

a) $2 - x = -(2 - x) \Longrightarrow$ $x = 2$

b) $y - 1 = -(y-1) \Longrightarrow y = 1$

c) $2z + 4 = -(2z+4) \Longrightarrow z = -2$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

## 36. ADIÇÃO DE MATRIZES

Considere as matrizes de **mesma ordem**,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e obtenha uma nova matriz somando os elementos de mesmos índices

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta nova matriz é chamada matriz soma de A e B e será indicada por A + B.

Podemos, então, definir:

*Se* $A = (a_{ij})_{n\times m}$ e $B = (b_{ij})_{n\times m}$, *então,* A + B *é uma matriz* $C = (c_{ij})_{n\times m}$, *tal que,*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, \ \forall j$$

ou

$$A + B = C \iff a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad \forall i, \forall j$$

## 36.1. PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MATRIZES

**36.1.1.** Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

calcular (A + B) + C e A + (B + C)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Comparando os dois resultados, podemos concluir que:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

isto é, a adição tem a **propriedade associativa.**

**Atenção:** a propriedade não foi demonstrada. Para isso deveríamos tomar matrizes quaisquer e não exemplos, como fizemos. Julgamos, porém, que as demonstrações são dispensáveis em uma primeira leitura.

**36.1.2.** Considere as matrizes A e B do item anterior, e calcule A + B e B + A:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo, $A + B = B + A$

isto é, a adição tem **propriedade comutativa.**

**36.1.3.** Considere a matriz A do item anterior e procure uma matriz E tal que:

$$\boxed{A + E = A}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz E é chamada **matriz nula** de ordem 2 por 3. A matriz nula é **elemento neutro** para a adição. Podemos indicar $E = (0)_{2\times3}$.

**36.1.4.** Considere a matriz A e a matriz E do ítem anterior e procure uma matriz A' tal que:

$$\boxed{A + A' = E}$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz A' é chamada **oposta de** A e será representada por -A.

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Observe que a adição de **matrizes**, no conjunto de todas as matrizes de **mesma ordem**, tem as mesmas propriedades da adição no conjunto dos **números reais**, isto é, o conjunto das matrizes de mesma ordem e o conjunto dos números reais têm a mesma **estrutura** em relação à **adição** (Esta estrutura é chamada **grupo comutativo**).

## 37. MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ e obtenha uma nova matriz, multiplicando todos os seus elementos por 3.

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{n\times m}$ e o número $k \in \mathbb{R}$, a matriz $k \cdot A$ é a matriz $B = (b_{ij})_{n\times m}$ tal que:

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}, \ \forall i, \ \forall j$$

ou

$$\boxed{B = k \cdot A \Longleftrightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij}, \ \forall i, \ \forall j}$$

## 38. MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Para definir a multiplicação de matrizes, exigiremos que a primeira matriz tenha tantas colunas quantas são as linhas da segunda matriz.

Assim, poderemos multiplicar uma matriz A, de ordem $2 \times 3$, por outra B, de ordem $3 \times 4$, porque:

A tem ...3........... colunas e B tem ......3............ linhas.

Considerando as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & -6 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

É possível determinar $A \cdot B$?

....Sim....... , porque A tem ...3... colunas e B tem ...3.... linhas.
(sim ou não)

É possível determinar $B \cdot A$?

...Não...., porque ...B tem 4 colunas e A tem 2 linhas.

É possível determinar $C \cdot D$?

...Não...., porque ...C tem 2 colunas e D tem 3 linhas.

É possível determinar $E \cdot F$?

...Sim...., porque ...E tem 2 colunas e F tem 2 linhas.

É possível determinar $F \cdot C$?

...Não...., porque ...F tem 4 colunas e C tem 3 linhas.

Uma matriz de ordem $m \times n$ pode ser multiplicada por outra de ordem ..... x r

## 38.1. MULTIPLICAÇÃO POR UMA MATRIZ COLUNA

Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ e a matriz coluna $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

É possível determinar $A \cdot B$ porque ...A tem 3 colunas e B tem 3 linhas.......... .

A matriz $A \cdot B$ será uma matriz com número de linhas igual ao de A e número de colunas igual ao de B. Isto é, será de ordem ...2 por 1........... .

Logo, temos de determinar apenas ...2... elementos: $a_{11}$ e ...$a_{21}$... .

O elemento $a_{11}$ estará na ...primeira........ linha da matriz $A \cdot B$. Para determiná-lo usaremos apenas a primeira linha de A, da seguinte forma:

$$a_{11} = 8 \cdot 9 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 86$$

O elemento $a_{21}$ estará na ...segunda...... linha da matriz $A \cdot B$. Para determiná-lo usaremos apenas a segunda linha de A, da seguinte forma:

$$a_{21} = 2 \cdot \underline{9} + 6 \cdot \underline{2} + 8 \cdot \underline{3} = 54$$

Assim,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 86 \\ 54 \end{pmatrix}$$

## 38.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 28

Calcule os produtos $A \cdot B$ onde:

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

O produto será uma matriz de ordem ....2 x 1....

$a_{11} = 8 \cdot$ ....(-1)... $1 \cdot$ ....6+... $4 \cdot$ ....3=.... ....10....

$a_{21} =$ ....2 (-1)... ....6 (+... ....8.3=... ....58....

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 \\ 58 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a_{11} =$ ....8.8 + 1.0 + 4.1 = 68....

$a_{21} =$ ....2.8 + 6.0 + 8.1 = 24....

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 68 \\ 24 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Calcule diretamente, sem escrever os cálculos para $a_{11}$ e $a_{21}$).

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 76 \\ 56 \end{pmatrix}$

d) Calcule o produto $C \cdot N$ onde $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

O produto é possível porque ....C tem duas colunas e N tem duas linhas....

A matriz produto terá ordem ....3 por 1.... porque C tem ....3.... linhas e N tem ....1.... coluna.

$a_{11} =$ ....1 . 2 + 3 . (-7) = -19....

$a_{21} =$ ....7 . 2 + 6 . (-7) = -28....

$a_{31} =$ ....5 . 2 + 0 . (-7) = 10....

$C \cdot N = \begin{pmatrix} -19 \\ -28 \\ 10 \end{pmatrix}$

## 38.3. MULTIPLICAÇÃO POR UMA MATRIZ COM MAIS DE UMA COLUNA

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ e a matriz $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

O produto de A por B é possível porque ....A tem 3 colunas e B tem 3 linhas.....

A matriz $A \cdot B$ terá ordem ....2 por 4.... porque A tem ....2.... linhas e B ....4.... colunas.

A matriz $A \cdot B$ será obtida, coluna por coluna, multiplicando-se a matriz A por cada coluna de B.

Assim,

$$A \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 54 \end{pmatrix} \text{ como já foi calculado.}$$

Os outros produtos também foram efetuados no ítem 38.2.

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 58 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 24 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Estes resultados são as 4 colunas da matriz $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 86 & 10 & 68 & 76 \\ 54 & 58 & 24 & 56 \end{pmatrix}$$

## 38.4. FAÇA VOCÊ — TAREFA 29

1. Calcule $E \cdot F$, sendo: $E = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

O produto é possível porque E tem 2 colunas e F tem 2 linhas.

A ordem de $E \cdot F$ é 2 por 4 porque E tem 2 linhas e F tem 4 colunas

1ª coluna de $E \cdot F$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -12 \end{pmatrix}$$

2ª coluna de $E \cdot F$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 25 \end{pmatrix}$$

3ª coluna de $E \cdot F$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -55 \end{pmatrix}$$

4ª coluna de $E \cdot F$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Então,

$$E \cdot F = \begin{pmatrix} 20 & 26 & 24 & 18 \\ -12 & 25 & -55 & -34 \end{pmatrix}$$

2. Calcule o produto $C \cdot E$, onde $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

O produto é possível porque C tem duas colunas e E tem duas linhas

A matriz $C \cdot E$ tem ordem 3 por 2 porque C tem 3 linhas e E tem duas colunas

**Cálculos:**

1ª coluna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -28 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2ª coluna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 90 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot E = \begin{pmatrix} -19 & 30 \\ -28 & 90 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

3. Calcule $D \cdot C$, onde $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & -6 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

$D \cdot C$ é uma matriz de ordem ...3 por 2... porque ...D tem 3 linhas e C tem 2 colunas.

(Procure calcular $D \cdot C$ sem escrever os cálculos).

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 22 & 21 \\ -31 & 12 \\ 76 & 63 \end{pmatrix}$$

**38.5.** Considere a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times r}$

É possível multiplicar A por B?

...Sim... porque ...A tem n colunas e B tem n linhas.
(sim ou não)

A matriz $A \cdot B$ tem ordem ...m por r... porque A tem ...m... linhas e B tem ...r... colunas.

**38.6.** Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

temos, $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 68 & 76 \\ 58 & 24 & 56 \end{pmatrix}$

(veja cálculos no ítem 6.2.).

Substituindo os elementos de A, B e C por símbolos genéricos, temos:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}}$$

O elemento 10 da matriz C foi obtido pelos cálculos:

$$8 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 10$$

em símbolos, $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = c_{11}$

O elemento $c_{11}$ está na ...1ª... linha e ...1ª... coluna de C. Para obtê-lo usamos os elementos da ...1ª... linha de A e ...1ª... coluna de B.

O elemento $c_{23}$ está na ...2ª... linha e ...3ª... coluna de C. Para obtê-lo usamos os elementos da ...2ª... linha de A e ...3ª... coluna de B.

Assim, $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$

ou, usando o símbolo somatório:

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}\, b_{k3}$$

O elemento $c_{ij}$ está na **i-ésima** linha e ...j-ésima... coluna de C. Para obtê-lo usamos os elementos da ...i-ésima... linha de A e ...j-ésima... coluna de B.

Os elementos da i-ésima linha de A são: $a_{i1}$ ..$a_{i2}$.. ..$a_{i3}$.

e os elementos da j-ésima coluna de B são: $b_{1j}$ ..$b_{2j}$.. ..$b_{3j}$..

Assim, $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} +$ ..$a_{i2}\, b_{2j}$.. + ..$a_{i3}\, b_{3j}$...

ou, em símbolo somatório:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, b_{kj}$$

Observe que i é uma variável que pode assumir os valores 1 ou 2 porque C tem ..duas.. linhas e j pode assumir os valores ..1, 2 ou 3.. porque ..C tem três colunas.. .

No somatório, k varia de 1 a 3 porque A tem ..3.. linhas e B tem ..3.. colunas.

**38.7.** Considere a matriz $A = (a_{ik})_{m \times n}$ e $B = (b_{kj})_{n \times r}$.

A matriz $C = A \cdot B$ é de ordem ..m por r.. porque ..A tem m linhas e B tem r colunas.

O elemento $c_{11}$ da matriz C é obtido a partir dos elementos da ..1ª.. linha de A e ..1ª.. coluna de B.

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}$$

ou, em símbolo somatório:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, b_{k1}$$

O elemento $c_{ij}$ da matriz C é obtido a partir dos elementos da ..i-ésima.. linha de A e ..j-ésima.. coluna de B.

Os elementos da i-ésima linha de A são:

$a_{i1}$ ..$a_{i2}$ $a_{i3}$.......... $a_{in}$

e os elementos da j-ésima coluna de B são:

$b_{1j}$ ..$b_{2j}$ $b_{3j}$ .......... $b_{nj}$

Assim, $c_{ij} =$ ..$a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$.

ou, em símbolo somatório:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

**38.8. DEFINIÇÃO**

*Dadas as matrizes* $A = (a_{ik})_{m \times n}$ *e* $B = (b_{kj})_{n \times r}$ *a matriz produto de* A *por* B *é a matriz*

$$C = A \cdot B = (c_{ij})_{m \times r}$$

*onde*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

ou seja,

$$A \cdot B = C \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

## 38.9. PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

**38.9.1.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 5)$$

e calcule $(A \cdot B) \cdot C$ e $A \cdot (B \cdot C)$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix} (1 \quad 5) = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 16 & 80 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \quad 5) = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 15 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 15 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 16 & 80 \end{pmatrix}$$

**Comparando os dois resultados, poderemos concluir que:**

$$\boxed{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$$

**Isto significa que a multiplicação de matrizes tem a propriedade associativa.**

**38.9.2.** Sendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

temos:

$$I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

**A matriz** $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, **quadrada de ordem $n \times n$, cujos elementos são todos nulos, exceto os da diagonal que são iguais a 1, é chamada matriz identidade de ordem n.**

$$I_n = (b_{ij})_{n \times n} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} b_{ij} = 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ b_{ij} = 1 & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

Se A é uma matriz de ordem n por m, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} A \cdot I_m = A \\ I_n \cdot A = A \end{array}}$$

**Observação:** Uma matriz quadrada de ordem n tal que: $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$ é chamada **matriz diagonal de ordem n.**

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**38.9.3.** Considere: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$(2 \cdot A) \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (2 \cdot D) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 8 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot (A \cdot D) = 2 \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\boxed{(2 \cdot A) \cdot D = A \cdot (2 \cdot D) = 2 \cdot (A \cdot D)}$$

Pode-se provar que $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(k \cdot A) \cdot D = A \cdot (K \cdot D) = K \cdot (A \cdot D)}$$

**38.9.4.** Sendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

calcule $A \cdot (B + C)$ e $A \cdot B + A \cdot C$

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\boxed{A \cdot (B + C) = A.B + A.C}$$

**Esta é a propriedade distributiva à direita, da multiplicação em relação à adição de matrizes.**

**38.9.5.** Sendo: $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

calcular $(B + C) \cdot D$ e $B \cdot D + C \cdot D$

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 34 & -16 \\ 34 & -16 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 14 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 20 & -12 \\ 27 & -14 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\boxed{(B + C) \cdot D = B.D + C.D}$$

**Esta é a propriedade distributiva à esquerda, da multiplicação em relação à adição de matrizes.**

**38.9.6.** Sendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ calcular $A \cdot D$ e $D \cdot A$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Quanto a $A \cdot D$: o produto não é possível.

Logo, a multiplicação de matrizes não é comutativa. Em geral, $A \cdot D \neq D \cdot A$, mesmo que a ordem permita que se efetue os dois produtos.

Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}$$

**38.9.7.** Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Temos: $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

mas, $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta é uma particularidade do produto de matrizes. Podemos ter produto nulo sem que nenhum dos fatores seja nulo.

## 39. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Escrever a matriz de ordem 3 por 3, definida por: $\begin{cases} a_{ij} = 2, & \text{se } i = j \\ a_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

2. Escrever a matriz $M = (b_{ij})_{2\times3}$ tal que: $b_{ij} = 3i - 2j + 1$; $\forall i$ e $\forall j$

3. Se o número de elementos de uma matriz é primo, o que podemos concluir sobre a ordem da matriz?

**Atenção:** O número de elementos é igual a $n \times m$.

4. Escrever a matriz de ordem 3 por 2, definida por: $\begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{se } i = j \\ a_{ij} = i^2, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

5. Escrever a matriz de ordem 3 por 3, definida por: $\begin{cases} a_{ij} = 0, & \text{se } i = j \\ a_{ij} = (-1)^i \cdot j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

### Sequência 2

1. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, determinar $A^2$.

2. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determinar o valor de $2A - B$.

3. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcular:
   a) $B \cdot A - 2A$
   b) $B^2 - {}^tB$

4. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $C = A + B$, calcular $\sum_{j=1}^{3} c_{2j}$.

5. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinar uma matriz B tal que: $A \cdot B = B \cdot A = I_3$.

6. Escrever a transposta de $A = (a_{ij})_{3\times3}$ tal que $a_{ij} = 3j - 2i$, $\forall i$ e $\forall j$.

7. Sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

erificar as propriedades da matriz transposta:

a) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

b) ${}^t(k \cdot A) = k \cdot {}^tA, \quad \forall k \in R$

c) ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

d) ${}^t({}^tA) = A$

e) ${}^t(A \cdot B) \neq {}^tA \cdot {}^tB$

8. Se $A \cdot B$ é de ordem $3 \times 2$ e $B \cdot C$ é de ordem $1 \times 2$, qual a ordem de cada matriz, A, B e C?

9. Resolver as equações matriciais:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

**Atenção:** Resolver essa equação matricial é o mesmo que resolver o sistema: $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 3y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

10. Escrever equações matriciais equivalentes aos seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -7 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

## 40. DETERMINANTES

Queremos definir uma função, a **função determinante**, que associa a cada matriz **quadrada**, um número real, chamado **determinante da matriz**. Esta função será útil no capítulo referente a sistemas de equações lineares.

Seja $M$ o conjunto de todas as matrizes quadradas. Definiremos a função:

$$\det: M \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$A \longmapsto y = \det A$$

(atenção: também podemos denotar $\det A = |A|$)

## 40.1. DETERMINANTE DE UMA MATRIZ 2 × 2

O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ é obtido da diferença dos produtos das duas diagonais:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

det A = 6 · 5 − 7 · 2

det A = 16

## 40.2. FAÇA VOCÊ — TAREFA 30

Calcule o determinante de cada matriz.

$B = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ det B = (−9) . 5 − 6 . 2 = −57

$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ det C = 3 . 12 − 6 . 6 = 0

$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ det D = $a_{11} . a_{22} - a_{21} . a_{12}$

## 40.3. DETERMINANTE DE UMA MATRIZ 3 × 3

Para se obter o determinante de uma matriz de ordem 3 × 3, procede-se do seguinte modo:

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Escreve-se, novamente, as duas primeiras colunas, do lado direito da matriz:

$$\begin{array}{ccc|cc} 6 & 2 & -1 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 8 & 7 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{array}$$

b) Considera-se a diagonal principal da matriz e suas paralelas com 3 elementos:

Esses elementos são multiplicados e somados:

$$6 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 \cdot 0 = 152$$

c) Faz-se o mesmo com a outra diagonal e suas paralelas:

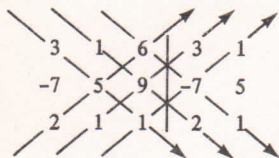
$$5 \cdot 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 8 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \cdot 2 = 22$$

d) O determinante da matriz A é a diferença desses resultados:

$$\det A = 152 - 22 = 130$$

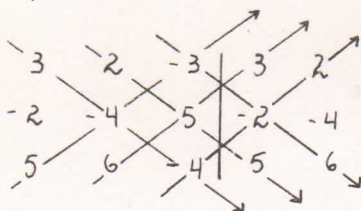
## 40.4. FAÇA VOCÊ – TAREFA 31

Calcule os determinantes das matrizes:

a) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -7 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$3 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot 9 \cdot 2 + 6 \cdot 7 \cdot 1 = 75$

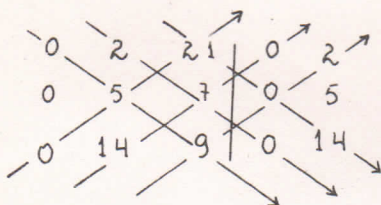
$2 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \cdot 9 \cdot 3 + 1 \cdot (-7) \cdot 1 = 80$

det B = $75 - 80 = -5$

b) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

$3 \cdot (-4) \cdot (-4) + 2 \cdot 5 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) \cdot 6 = 134$

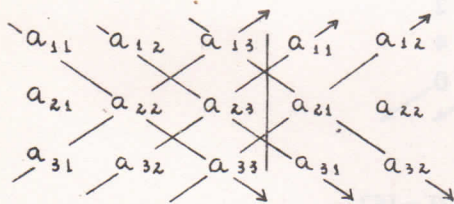
$5 \cdot (-4) \cdot (-3) + 6 \cdot 5 \cdot 3 + (-4) \cdot (-2) \cdot 2 = 166$

$\det C = 134 - 166 = -32$

c) $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 21 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 14 & 9 \end{pmatrix}$

$0 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 7 \cdot 0 + 21 \cdot 0 \cdot 14 = 0$

$0 \cdot 5 \cdot 21 + 14 \cdot 7 \cdot 0 + 9 \cdot 0 \cdot 2 = 0$

$\det D = 0$

d) $E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

det E = $(a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{31} a_{22} a_{13} + a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12})$

## 40.5. DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE ORDEM 4 x 4

Consideremos a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

o determinante da matriz A pode ser obtido da seguinte forma:

a) Considera-se o elemento $a_{11} = 3$ e a matriz que se obtém de A eliminando a linha e a coluna que contém esse elemento

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e toma-se o produto

$$(-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 130 = 390$$

(observe que o expoente de $-1$ é igual à soma dos dois índices do elemento considerado $a_{11} = 3$).

b) Faz-se o mesmo com cada elemento da primeira linha da matriz A:

Para o elemento $a_{12} = 2$

$$(-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 18 = -36$$

Para $a_{13} = 1$

$$(-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$$

Para $a_{14} = 1$.

$$(-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot (-30) = 30$$

c) O determinante da matriz A é a soma dos resultados assim obtidos:

$$\det A = 390 + (-36) + 4 + 30 = 388$$

## 40.6. FAÇA VOCÊ – TAREFA 32

1. Calcular $\det B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Para $a_{11} = 1$: $(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 25$

Para $a_{12} = 5$: $(-1)^{1+2} \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -75$

Para $a_{13} = 4$: $(-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = -84$

Para $a_{14} = -1$: $(-1)^{1+4} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = -39$

$\det B = 25 - 75 - 84 - 39 = -173$

2. Calcular det C, sendo $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para $a_{11} = 2$ : $(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -84$

Para $a_{12} = 3$ : $(-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -15$

Para $a_{13} = -1$ : $(-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -13$

Para $a_{14} = 2$ : $(-1)^{1+4} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 64$

$\det C = -84 - 15 - 13 + 64 = -48$

3. Calcular o determinante da matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

det D = ..0.......

Verificar que o determinante dessa matriz pode ser calculado com a regra empregada no exercício 1:

Para $a_{11} = 2$: $(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = $ ..4......

Para $a_{12} = 4$: $(-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 8$

Para $a_{13} = 3$: $(-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -12$

det D = $4 + 8 + (-12) = $ ..0......

**Observação:** A regra descrita para o cálculo do determinante de uma matriz $4 \times 4$ é a regra geral para o cálculo do determinante de qualquer matriz de ordem $n \times n$.

## 40.7. COFATOR DE UM ELEMENTO, $a_{ij}$, DE UMA MATRIZ

*Cofator do elemento* $a_{ij}$ *de uma matriz é o produto de* $(-1)^{i+j}$ *pelo determinante da matriz que se obtém eliminando a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz dada.*

Sendo
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

o cofator do elemento $a_{23} = 5$ da matriz A será denotado $A_{23}$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{3}$$

Do mesmo modo,

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underline{-5}$$

Observando o cálculo da matriz 4 × 4 do ítem 40.5., podemos dizer que o determinante da matriz A é a soma dos produtos dos elementos da ....primeira..... linha dos respectivos ....cofatores..... desses elementos.

Isto é,

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} A_{14} =$$
$$= 3 \cdot 130 + 2 \cdot (-18) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 30 = \underline{388}$$

## 40.8. DEFINIÇÃO

Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Então,

$$\det A = a_{11}, \quad \text{se } n = 1$$
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}, \quad \text{se } n \neq 1$$

## 40.9. TEOREMA DE LAPLACE

*A soma dos produtos dos elementos de uma linha qualquer de uma matriz por seus respectivos cofatores é igual ao determinante da matriz.*

Você pode verificar este teorema, calculando o determinante da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Pela definição,

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$a_{11} \cdot A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -6$$

$$a_{12} \cdot A_{12} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 26$$

$$a_{13} \cdot A_{13} = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$\det A = \underline{19}$

b) Calculemos a soma dos produtos dos elementos da segunda linha por seus respectivos cofatores:

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$a_{21}\cdot A_{21} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = 3$$

$$a_{22}\cdot A_{22} = 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = 1$$

$$a_{23}\cdot A_{23} = 5\cdot(-1)^{2+3}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 15$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \text{....19.} = \det A$$

c) Calculando com os elementos da terceira linha:

$$a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$a_{31}\cdot A_{31} = 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix} = 22$$

$$a_{32}\cdot A_{32} = 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix} = -8$$

$$a_{33}\cdot A_{33} = (-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} = 5$$

temos: $a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \text{.19....} = \det A$

Este teorema é de grande utilidade no cálculo de determinantes, pois graças a ele podemos escolher a linha cujos elementos têm menor valor absoluto ou, a linha que tem maior número de zeros. A demonstração deste teorema está além do nível deste curso.

## 40.10. FAÇA VOCÊ – TAREFA 33

Calcule os determinantes, escolhendo qualquer linha da matriz para o cálculo:

a) $A = \begin{pmatrix}9 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Calculando com os elementos da segunda linha, vem:

$$a_{21}\cdot A_{21} = (-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = -6$$

$$a_{22}\cdot A_{22} = 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\det\begin{pmatrix}9 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = 0$$

$$a_{23}\cdot A_{23} = 3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\det\begin{pmatrix}9 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix} = -12$$

$$\det A = -18$$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Calculando com os elementos da segunda linha, vem:

$b_{21} \cdot B_{21} = 0 \cdot B_{21} = 0$

$b_{22} \cdot B_{22} = 0 \cdot B_{22} = 0 \qquad \therefore \det B = 0$

$b_{23} \cdot B_{23} = 0 \cdot B_{23} = 0$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Calculando com os elementos da terceira linha, vem:

$c_{31} \cdot C_{31} = 0 \cdot C_{31} = 0$

$c_{32} \cdot C_{32} = 0 \cdot C_{32} = 0$

$c_{33} \cdot C_{33} = 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 52$

$\therefore \det C = 52$

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Calculando com os elementos da quarta linha, vem:

$d_{41} \cdot D_{41} = 4 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 360$

$d_{42} \cdot D_{42} = 0 \cdot D_{42} = 0$

$d_{43} \cdot D_{43} = 4 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = -36$

$d_{44} \cdot D_{44} = 6 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -216$

$\therefore \det D = 108$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Calculando com os elementos da segunda linha, vem:

$e_{21} \cdot E_{21} = 4 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$e_{22} \cdot E_{22} = 0 \cdot E_{22} = 0$

$e_{23} \cdot E_{23} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 48$

$e_{24} \cdot E_{24} = 0 \cdot E_{24} = 0$

$\therefore \det E = 48$

## 41. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

**41.1.** Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A = \ldots 6 \ldots$$

$$^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det {}^tA = \ldots 6 \ldots$$

Então, $\boxed{\det A = \det {}^tA}$

Podemos enunciar a propriedade:

> *O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.*

**Observação:** Em virtude desta propriedade, em toda teoria dos determinantes, não será necessário distinguir linhas e colunas, pois tudo o que é verdade para as linhas da matriz A, é verdade para as colunas de $^tA$.

**41.2.** Se:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det B = \ldots 0 \ldots$$

Se:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det C = \det {}^tC = \ldots 0 \ldots$$

> **Se uma matriz tem uma linha ou uma coluna de zeros, seu determinante é nulo.**

**41.3.** Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cujo determinante, já calculado no ítem 41.1., é $\det A = \ldots 6 \ldots$

Considere agora a matriz B, obtida de A, trocando entre sí as linhas 2 e 3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \ldots -6 \ldots$$

Assim, $\boxed{\det A = -\det B}$

Isto ocorre sempre que se troca entre sí os lugares de duas linhas (ou colunas).

> *Dada a matriz* $A = (a_{ij})_{n \times n}$, *o determinante da matriz* B *que se obtém de* A, *trocando entre sí os lugares de duas linhas (ou colunas), é igual ao determinante de* A *com sinal trocado.*

**41.4.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

det A = ...0... det B = ...0...

**Para que você entenda estes resultados, escreva a matriz A' que se obtém de A trocando os lugares das colunas 1 e 2:**

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = A' \Longrightarrow \det A = \det A'$$

**Escreva a matriz B' que se obtém de B trocando os lugares das linhas 1 e 4:**

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow B = B' \Longrightarrow \det B = \det B'$$

**Mas pela propriedade do ítem 41.3.:**

$$\det A = -\det A' \qquad \text{e} \qquad \det B = -\det B'$$

**Assim, temos:**

$$\det A = \det A' = -\det A' \Longrightarrow \det A = 0$$

$$\det B = \det B' = \det B' \Longrightarrow \det B = 0$$

***Se uma matriz tem duas linhas ou duas colunas iguais, seu determinante é nulo.***

**41.5.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Escreva a matriz B, obtida de A, multiplicando a primeira linha por um número qualquer, k.**

$$B = \begin{pmatrix} 2k & 3.K & 5.K \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando os determinantes:

det A = -33

det B = -33K

Então, **det B = K det A**

Temos a propriedade:

***Multiplicando-se uma linha (ou coluna) de uma matriz A, por uma constante k∈R, seu determinante fica multiplicado por k.***

**41.6.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

e calcule os determinantes desenvolvendo pela primeira linha:

$\det A = 7(a_1 + b_1) +$ (-19) . $(a_2 + b_2)$ + 2 . $(a_3 + b_3)$

$\det B = 7a_1 +$ (-19) $a_2$ + 2 $a_3$

$\det C =$ 7 $b_1$ + (-19) $b_2$ + 2 $b_3$

$\det B + \det C = 7(a_1 +$ $b_1$ $) +$ (-19) $(a_2 + b_2)$ + 2 $(a_3 + b_3)$

Portanto, $\det A = \det B +$ det C

*Se uma matriz A é tal que a i-ésima linha é dada por $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, então seu determinante é igual à soma dos determinantes de duas matrizes: a primeira obtida de A, substituindo a i-ésima linha pelos elementos $b_{ij}$, e a segunda obtida de A, substituindo a i-ésima linha pelos elementos $c_{ij}$.*

## 41.7. FAÇA VOCÊ – TAREFA 34

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} + c_{31} & b_{32} + c_{32} & b_{33} + c_{33} & b_{34} + c_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Desenvolvendo pelos elementos da 3ª linha, vem:

$$\det A = (b_{31} + c_{31}) \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - (b_{32} + c_{32}) \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} +$$

$$+ (b_{33} + c_{33}) \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - (b_{34} + c_{34}) \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

As matrizes de que fala a propriedade do ítem 41.6. são:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Calculando seus determinantes, também pelos elementos da 3ª linha, vem:

$$\det B = b_{31} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - b_{32} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} +$$

$$+ b_{33} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - b_{34} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\det C = c_{31} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} - c_{32} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} +$$

$$+ c_{33} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} - c_{34} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Portanto, $\det B + \det C = \det A$

**41.8.** Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 8 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma **combinação linear** das linhas 2 e 3 da matriz A, é um conjunto de três elementos obtidos da seguinte forma:

$$\alpha \cdot (2^a \text{ linha}) + \beta \cdot (3^a \text{ linha}), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

$$\alpha \cdot (7, -1, 8) + \beta \cdot (5, 1, 1)$$

Assim, fazendo $\alpha = 2$ e $\beta = -3$, temos a seguinte combinação linear:

$$(2 \cdot 7 + (-3) \cdot 5,\ 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1,\ 2 \cdot 8 + (-3) \cdot 1)$$

isto é, $(-1, -5, 13)$

## 41.9. FAÇA VOCÊ – TAREFA 35

a) Dê outros valores a $\alpha$ e $\beta$ e obtenha uma nova combinação linear das linhas 2 e 3 da matriz A do ítem anterior.

$\alpha = 3$ $\beta = 4$ (por exemplo)

$(3 \cdot 7 + 4 \cdot 5,\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1,\ 3 \cdot 8 + 4 \cdot 1)$

isto é, $(41, 1, 28)$

b) Obtenha uma combinação linear das linhas 1 e 3 da matriz A:

$$\alpha \cdot (1^a \text{ linha}) + \beta \cdot (3^a \text{ linha})$$

$\alpha = 3$ $\beta = 4$ (por exemplo)

$(3 \cdot 3 + 4 \cdot 5,\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1,\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1)$

isto é, $(29, 7, 19)$

c) Obtenha uma combinação linear das linhas 1, 2 e 3 da matriz A:

$$\alpha \cdot (1^a \text{ linha}) + \beta \cdot (2^a \text{ linha}) + \gamma \cdot (3^a \text{ linha})$$

$\alpha = -1$ $\beta = 2$ $\gamma = 3$ (por exemplo)

$(26, 0, 14)$

d) Escreva uma matriz B, obtida de A substituindo a segunda linha por uma combinação linear qualquer das linhas 1 e 3:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 29 & 7 & 19 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcule:

$\det A = 66$

$\det B = 0$

e) Escreva uma matriz C, obtida de A substituindo a 3ª linha por uma combinação linear qualquer das linhas 1 e 2:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 8 \\ 11 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

por exemplo: $\alpha = -1 \quad \beta = 2$

$(11, -3, 11)$

e calcule:

det A = 66

det C = 0

**41.10.** Seja:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

uma combinação linear das linhas 2 e 3 é um conjunto:

$$(\alpha a_{21} + \beta a_{31}, \ \alpha a_{22} + \beta a_{32}, \ \alpha a_{23} + \beta a_{33})$$

Escreva a matriz E, obtida de D substituindo a 1ª linha, por esta combinação linear das linhas 2 e 3.

$$E = \begin{pmatrix} \alpha a_{21} + \beta a_{31} & \alpha a_{22} + \beta a_{32} & \alpha a_{23} + \beta a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Aplicando a propriedade do ítem 41.6., podemos escrever:

$$\det E = \det \begin{pmatrix} \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \beta a_{31} & \beta a_{32} & \beta a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Aplicando a propriedade do ítem 41.5., podemos escrever:

$$\det E = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \beta \cdot \det \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Aplicando a propriedade do ítem 41.4., podemos escrever:

det E = 0

Temos, então, a propriedade:

| |
|---|
| *Se uma matriz A tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então:* det A = 0 |

## 41.11. TEOREMA DE CAUCHY

Considere a matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e calcule $\sum_{j=1}^{3} a_{1j} A_{2j}$

isto é, a soma dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos cofatores da 2ª linha

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ 1(-1)^{2+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 + 10 + (-7) = 0$$

**Compare o cálculo feito, com o desenvolvimento, pelos elementos da segunda linha, do determinante da matriz.**

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{2+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 1(-1)^{2+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**O resultado tem que ser zero porque** a matriz B tem duas linhas iguais.

**Então, podemos enunciar o teorema de Cauchy:**

> ***A soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz pelos cofatores de outra linha (ou coluna) é igual a zero.***

## 41.12. TEOREMA DE JACOBI

Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Escreva uma combinação linear das linhas 1 e 2.**

$$\alpha \cdot (1^{a} \text{ linha}) + \beta \cdot (2^{a} \text{ linha})$$

**escolhendo,** $\alpha = -1$ **e** $\beta = 2$ (por exemplo).

**temos:** $(7, -4, 13)$

**Escreva a soma da terceira linha da matriz A com esta combinação linear das linhas 1 e 2:**

$$(1 + 7,\ 3 + (-4),\ 2 + 13)$$

**isto é,** $(8, -1, 15)$

**Escreva a matriz B, obtida de A, substituindo a terceira linha por esta soma da terceira linha com uma combinação linear das linhas 1 e 2:**

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \\ 8 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

**Calcule:** $\det A = -59$

$\det B = -59$

**Este resultado já podia ser esperado, pois a terceira linha de B é:**

$$(1 + 7,\ 3 + (-4),\ 2 + 13)$$

e portanto pela propriedade do ítem 41.6. vem:

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \\ 7 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

Mas, a matriz do segundo termo da soma

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \\ 7 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

tem determinante zero porque a terceira linha é uma combinação linear das linhas 1 e 2 (usando a propriedade do ítem 41.8.)

Logo, temos

$$\boxed{\det B = \det A}$$

Podemos, então, enunciar o teorema de Jacobi:

> *Se adicionarmos aos elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz* A, *qualquer combinação linear de outras linhas (ou colunas), o determinante da nova matriz é igual ao determinante de* A.

**41.13.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculando

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -1 \\ 11 & -2 & 12 \\ -12 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

temos:

$$\det A = -21$$

$$\det B = 27$$

$$\det (A \cdot B) = -567$$

e portanto:

$$\boxed{\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

> *O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes.*

## 42. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Calcule os seguintes determinantes, usando a definição:

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Calcule os determinantes, usando qualquer técnica:

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 49 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} x-y & x \\ y-x & y \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Calcule os determinantes, sem desenvolver:

a) $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} b & a-b & a \\ c & b-c & b \\ a & c-a & c \end{pmatrix}$

d) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

4. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ calcule det A, desenvolvendo pela 1ª, pela 2ª e pela 3ª linha, para verificar o teorema de Laplace.

## Sequência 2

1. Complete a matriz de modo que seu determinante seja 1.

$$\begin{pmatrix} \cos a & \text{sen } a \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

2. Complete a matriz do exercício anterior de modo que seu determinante seja $\cos(a+b)$.

3. Demonstre que:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{pmatrix} = 0$$

4. Resolva as equações:

a) $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 1 & 0 \\ x & 5 & 2 \end{pmatrix} = 0$

b) $\det \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ -3 & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & x^2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & \log_2 3 & \log_2 6 \\ 7 & 5 & 12 \end{pmatrix} = 0$

5. Determine o valor de m para que a equação $\det \begin{pmatrix} x & m & 5 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$ admita soluções reais.

6. Resolva a equação, usando as propriedades dos determinantes: $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x^2 & 1 & 4 & 9 \\ x^3 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} = 0.$

7. Prove, aplicando as propriedades dos determinantes, que: $\det\begin{pmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \text{sen}^2\, a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \text{sen}^2\, b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \text{sen}^2\, c \end{pmatrix} = 0$

**Sequência 3**

1. Determine o cofator de $a_{12}$ na matriz $A = (a_{ij})_{3\times2}$, tal que: $a_{ij} = i - j$, $\forall i$ e $\forall j$.

2. Determine os cofatores de todos os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{2\times2}$, tal que: $a_{ij} = 2i - 3j$, $\forall i$ e $\forall j$.

3. Escreva uma matriz A de 3ª ordem, tal que:

a) $\det A = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\det A = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 43. INVERSÃO DE MATRIZES

**43.1.** Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e procure uma matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, tal que:

$$A \cdot B = I,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efetuando o produto:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot z & 1.y + 2.w \\ 3.x - 1.z & 3.y - 1.w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e pela igualdade de matrizes:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot z = 1 \\ 1.y + 2.w = 0 \\ 3.x - 1.z = 0 \\ 3.y - 1.w = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Com este resultado, calcule

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, $\boxed{A \cdot B = B \cdot A = I}$

## 43.2. DEFINIÇÃO

*Diz-se que uma matriz* quadrada A *é inversível se, e somente se, existe uma matriz* B *tal que:*

$$AB = BA = I$$

Simbolizaremos a matriz inversa de A, quando existir, por $A^{-1}$.

Assim, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

## 43.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 36

1. Determine a matriz inversa, se existir, de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 1 \cdot x + 3 \cdot z = 1 \\ 2.x + 5.z = 0 \\ 1.y + 3.w = 0 \\ 2.y + 5.w = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Determine a matriz inversa, se existir, de:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determine a matriz inversa, se existir, de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 8z = 1 \\ 2y + 8t = 0 \\ 1x + 4z = 0 \\ 1y + 4t = 1 \end{cases}$$

O sistema não tem solução.

$\therefore$ não existe $A^{-1}$

4. **Determine a matriz inversa, se existir, de:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 1 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 0 \\ x_3 + y_3 + z_3 = 0 \\ 2x_1 + 3y_1 + 2z_1 = 0 \\ 2x_2 + 3y_2 + 2z_2 = 1 \\ 2x_3 + 3y_3 + 2z_3 = 0 \\ 4x_1 + 7y_1 + 5z_1 = 0 \\ 4x_2 + 7y_2 + 5z_2 = 0 \\ 4x_3 + 7y_3 + 5z_3 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Observação:** O exercício 3 mostra que nem toda matriz quadrada é inversível.

O exercício 4 mostra que a técnica de inverter matrizes resolvendo sistemas de equações pode-se tornar muito incômoda.

## 43.4. MATRIZ – COFATOR DE UMA MATRIZ DADA

**43.4.1.** Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e escreva a matriz $B = (b_{ij})_{2\times 2}$ tal que: $b_{ij} = A_{ij}$.

$b_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det(-1) = -1$

$b_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det(3) = -3$

$b_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det(2) = -2$

$b_{22} = (-1)^{2+2} \det(-1) = -1$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**43.4.2.** Considere agora a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e escreva $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ tal que: $b_{ij} = A_{ij}$.

$b_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$b_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -2$

$b_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$b_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$b_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -8$

$b_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5$

$b_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -4$

$b_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 14$

$b_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = -8$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ -4 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

A matriz B é a matriz – cofator de A, em ambos os casos. Assim, podemos definir:

> *Dada a matriz* **quadrada** $A = (a_{ij})_n$, *chama-se matriz – cofator de* A, *a matriz* $B = (b_{ij})_n$ *cujos elementos são os cofatores dos elementos correspondentes de* A.

$$B = \text{cof } A \iff b_{ij} = A_{ij}$$

**43.5.** Considere a matriz A do ítem anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e a respectiva matriz cofator

$$\text{cof } A = B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \\ -4 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

Calcule agora a matriz

$$C = \frac{1}{\det A} \cdot {}^tB = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -8 & 14 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Efetuando o produto

$$A \cdot C = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -8 & 14 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do mesmo modo,

$$C \cdot A = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -8 & 14 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz C é a inversa de A, porque satisfaz

$$A \cdot C = C \cdot A = I$$

isto é,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{8}{6} & -\frac{14}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{8}{6} \end{pmatrix}$$

ou seja:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t(\text{cof } A)$$

**43.6. EXISTÊNCIA DA MATRIZ INVERSA**

> Dada uma matriz **quadrada** $A = (a_{ij})_n$, se $\det A \neq 0$, então existe a inversa de A e esta é dada por:
>
> $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t(\text{cof } A)$$

Este teorema é válido para uma matriz quadrada de ordem n. Faremos a demonstração apenas para ordem 3, porque para os outros casos a demonstração é idêntica.

Considere
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e
$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad {}^t(\text{cof } A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Logo,
$$A \cdot {}^t(\text{cof } A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

Temos, observando os elementos da diagonal,

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det A$$
$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \det A$$
$$a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \det A$$

Para os outros elementos temos, por exemplo,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$

pelo teorema de Cauchy. Do mesmo modo,

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$$
$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0$$
$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0$$
$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0$$
$$a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0$$

Logo,
$$A \cdot {}^t(\text{cof } A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

Portanto,
$$A \cdot \left[ \frac{1}{\det A} \, {}^t(\text{cof } A) \right] = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = I$$

Do mesmo modo se prova que:
$$\left[ \frac{1}{\det A} \, {}^t(\text{cof } A) \right] \cdot A = I$$

Logo,
$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t(\text{cof } A)}$$
c.q.d.

## 43.7. UNICIDADE DA MATRIZ INVERSA

Suponha que uma matriz A tenha duas inversas, B e B'. Isto é,

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

$$A \cdot B' = B' \cdot A = I$$

Vamos demonstrar que isto não é possível, isto é, se isto ocorrer então devemos ter B = B'.

Considere uma das igualdades da hipótese, por exemplo, $A \cdot B = I$ e multiplique ambos os membros, à esquerda, por B':

$$B' \cdot (A \cdot B) = B' \cdot I$$

Aplique a propriedade associativa ao primeiro membro:

$$(B' \cdot A) \cdot B = B' \cdot I$$

Substitua o parênteses pelo resultado dado pela hipótese:

$$..I.. \cdot B = B' \cdot I$$

Logo, como $I \cdot B = ...B...$ e $B' \cdot I = ...B'...$ temos, B = B'. c.q.d.

**43.8.**

> *Uma matriz quadrada* A *é inversível* $\iff$ det A $\neq$ 0.

O teorema da existência, ítem 43.6., já provou que se det A $\neq$ 0, então existe a inversa de A.

De fato, se existe $A^{-1}$,

$$A \cdot A^{-1} = ...I...$$

e, aplicando a propriedade do ítem 41.13.

$$\det A \cdot ...\det A^{-1}... = ...1..$$

$$\Longrightarrow \boxed{\det A \neq 0}$$

e ainda mais

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{..\det A..}}$$

## 43.9. FAÇA VOCÊ – TAREFA 37

1. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Determine a matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Temos: $\det A = ..-2.. \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Multiplicando ambos os membros, à esquerda, por $A^{-1}$, temos:

$$..A^{-1}.. \cdot (A \cdot X) = ..A^{-1}.. \cdot B$$

e usando a propriedade associativa,

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot ..X.. = ..A^{-1}.. \cdot B$$

$$\Longrightarrow X = ..A^{-1} \cdot B..$$

Calculando

$$A^{-1} = \frac{1}{..-2..}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

e multiplicando,

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{..-2..}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{..-2..}\begin{pmatrix} -18 & 13 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -13/2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -13/2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Seja $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 29 & 51 & 43 \\ 10 & 20 & 10 \end{pmatrix}$. Determine a matriz X.

Então, a matriz X deve ter ordem $2 \times 3$

Chamando $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, temos: $X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 29 & 51 & 43 \\ 10 & 20 & 10 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 & 51 & 43 \\ 10 & 20 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -21 & -49 & -7 \\ -28 & -42 & -56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Seja $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ Determine a matriz X.

Chamando $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ temos $X \cdot A = B$

Multiplicando ambos os membros, à direita, por $A^{-1}$, vem:

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

e usando a propriedade associativa:

$$X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}$$

$$\Longrightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

Calculando, $A^{-1} = \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$B \cdot A^{-1} = \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 7 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{19} & \frac{3}{19} \\ -\frac{7}{19} & \frac{16}{19} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{19} & \frac{3}{19} \\ \frac{-7}{19} & \frac{16}{19} \end{pmatrix}$$

## 44. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Verifique se as seguintes matrizes admitem inversa e calcular a inversa quando existir.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $\det A^{-1}$.

3. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $\det A^{-1}$.

## Sequência 2

1. Supondo A e B matrizes inversíveis, exprima X em função de A e B, justificando todas as passagens, nos seguintes casos:

a) $X \cdot A = B$

b) $X \cdot (A + B) = I$

c) $A \cdot X + B = A$

d) $2A \cdot X = A$

2. Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Resolva as equações matriciais:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 9 & 9 & 6 \\ -9 & -9 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Dada a equação matricial: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Resolva a equação por inversão de matrizes.

b) Escreva o sistema de equações equivalentes.

c) Verifique que os elementos da matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ são as soluções do sistema.

5. Dado o sistema de equações: $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$

a) Escreva a equação matricial equivalente.

b) Determine as soluções do sistema, resolvendo a equação matricial.

6. Dado o sistema de equações: $\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$ resolva o sistema, resolvendo a equação matricial equivalente.

7. Resolva os seguintes sistemas, por inversão de matrizes:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 7 \\ 3x - 5y = 3 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$

# SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

## 45. PRELIMINARES

**45.1.** As seguintes equações:

$$3x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} x - 2y = 7$$

$$2x + 4y - 3z = \frac{1}{2}$$

são equações lineares porque cada termo é um monômio do 1º grau.

**Responda sim ou não para as seguintes equações indicando se são ou não lineares.**

a) $x + y + 3z = 2$ ( sim )

b) $x^2 + 2y = 4$ ( não )

c) $x + y = \sqrt{z}$ ( não )

d) $\log x = y$ ( não )

e) $3x - \frac{y}{2} = z$ ( sim )

f) $2x - \frac{1}{2} y + 4z = 0$ ( sim )

g) $x_1^2 + 3x_2^3 = x_3$ ( não )

h) $x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$ ( sim )

i) $xy + yz = 4$ ( não ) (Atenção!)

**Definição:**

> *Uma* **equação linear** *a n incógnitas é uma equação da forma:*
>
> $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais chamados **coeficientes da equação**; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as **incógnitas** e **b** é um número real chamado **termo independente**.

Se $b = 0$, a equação linear é chamada **homogênea**.

As equações lineares homogêneas que se encontram na lista de a) a i) são:

1) $3x - \frac{y}{2} = z$

cujos coeficientes são: $a_1 = 3$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = -1$

2) $2x - \frac{1}{2}y + 4z = 0$

cujos coeficientes são: $a_1 = 2$ ; $a_2 = -\frac{1}{2}$ ; $a_3 = 4$

3) $x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$

cujos coeficientes são: $a_1 = 1$ ; $a_2 = -5$ ; $a_3 = -1$ ; $a_4 = 5$

**45.2. SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR**

a) Considerando a equação linear

$$2x + 3y = 1$$

o par ordenado (2, –1) é uma solução da equação porque fazendo x = 2 e y = –1 temos a identidade $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1$.

Encontre mais três pares ordenados que também sejam soluções da equação:

$(-1, 1)$, $(-\frac{5}{2}, 2)$, $(2, -1)$

b) Verifique quais das seguintes quádruplas ordenadas são soluções da equação:

$$2x - y + 3z - 2w = 1.$$

$$(1, -1, 3, \tfrac{5}{2})\ \ (1, 4, 1, 0)\ \ (\tfrac{1}{2}, -1, 3, 5)\ \ (2, -1, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{2}).$$

Quádruplas que são soluções da equação:

$(1, 4, 1, 0)$ ; $(\frac{1}{2}, -1, 3, 5)$

**Definição:**

*Uma solução da equação linear a n incógnitas:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

*é uma n-upla ordenada de números reais* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *que verifica a igualdade:*

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$$

**45.3.** a) Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Verifique quais dos seguintes pares são soluções da primeira equação, e quais são soluções da segunda:

(2, 4) solução da 1ª equação

(–4, 5) solução da 2ª equação

(3, 1) não é solução nem da 1ª nem da 2ª

(–12, 11) solução da 1ª e 2ª

$(\frac{4}{3}, 3)$ não é solução nem da 1ª nem da 2ª

(–4, 7) solução da 1ª equação

Vemos que (–12, 11) é solução comum às duas equações dadas. Então (–12, 11) é solução do sistema.

b) Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

Considere o valor de x dado pela primeira equação: x = 2 - y - 3z

e substitua nas outras duas equações:

$$\begin{cases} 2\,(2 - y - 3z) - 3y - 2z = -3 \\ 3\,(2 - y - 3z) - 2y - z = 1 \end{cases}$$

Temos o sistema a duas incógnitas:

$$\begin{cases} 5y + 8z = 7 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

que resolvido dá y = 3, z = -1.

Calculando o valor de x pela primeira equação vem: x = 2 - y - 3z = 2

Portanto, o terno ordenado ( 2, 3, -1 ) é uma solução do sistema.

## 45.4. DEFINIÇÃO

*Chama-se* **sistema linear**, *qualquer conjunto de* **m** *equações lineares a* **n** *incógnitas.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cada elemento $a_{ij}$ representa o coeficiente da j-ésima incógnita, na i-ésima equação.

Assim, $a_{23}$ é coeficiente de $x_3$ na 2ª equação.

$a_{52}$ é coeficiente de $x_2$ na 5ª equação

$a_{25}$ é coeficiente de $x_5$ na 2ª equação

Se $b_i = 0$, $\forall i$, o sistema é chamado **homogêneo.**

## 45.5. DEFINIÇÃO

*Uma solução de um sistema linear de* **m** *equações a* **n** *incógnitas é qualquer* **n-upla** *ordenada de números reais* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *que é solução de todas as* **m** *equações.*

# 46. SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

**46.1.** Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 4x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Podemos associar a esse sistema as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dos coeficientes, chamada **matriz do sistema,** e a matriz

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

dos coeficientes e do termo independente, chamada **matriz completa do sistema.**

Considere agora, a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Efetuando o produto indicado no primeiro membro vem:

$$\begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ x + 2y - z \\ 4x + y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

e, pela igualdade das matrizes, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 3 \\ 4x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

que é o sistema dado inicialmente.

Assim, concluímos que, dado um sistema de equações lineares, podemos escrever a equação matricial $A \cdot X = B$

onde: A é a matriz do sistema.

X é a matriz coluna das incógnitas

e B é a matriz dos termos independentes.

**46.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 38**

1. Escreva as diversas matrizes associadas ao sistema:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

a) **Matriz do sistema:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) **Matriz completa do sistema:** $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) **Matriz das incógnitas:** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

d) **Matriz dos termos independentes:** $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Escreva o sistema na forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Escreva os seguintes sistemas na forma matricial:

a) $\begin{cases} x - y + 4z = 2 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ \frac{1}{2}y + x = 1 \\ -y + \frac{1}{3}x = \frac{2}{5} \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1/2 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2/5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ y + z = 2 \\ x + 4z = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - 2z - t = 0 \\ x - z + t = -1 \\ -x - y + 2t = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

## 47. SISTEMAS EQUIVALENTES

**47.1.** a) Considere o sistema: $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

**O conjunto das soluções deste sistema, isto é, seu conjunto verdade é:**

$$V = \{(\ 1\ ,\ 3\ )\}$$

b) Determine o conjunto verdade do sistema: $\begin{cases} 2x - 5y = -13 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

$$V = \{(\ 1\ ,\ 3\ )\}$$

**Observe que os dois sistemas dados são diferentes como conjuntos de equações, mas admitem o mesmo** con-junto verdade.

**Dizemos neste caso, que os sistema são equivalentes.**

**Definição:**

> *Dois sistemas de equações são* **equivalentes** *se, e somente se, eles admitem o mesmo conjunto verdade.*

**47.2.** Verifiquemos se são equivalentes os sistemas:

$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ -x + 4y + 2z = 8 \\ 2x + 3y - 2z = 15 \end{cases}$

a) O primeiro sistema já foi resolvido no ítem 46.3. deste capítulo, pelo método de substituição e encontramos:

$$V = \{(\ 2\ ,\ 3\ ,\ -1\ )\}$$

b) O segundo sistema pode ser resolvido pelo mesmo método mas usaremos o método da transformação, que será utilizado sistematicamente a partir deste parágrafo:

Copie cada equação como está indicado, efetuando as operações também indicadas.

1ª equação: $x + 2y - z = 9$

2ª equação: $-x + 4y + 2z = 8$

Soma: $6y + z = 17$ (1)

2ª equação x 2: $-2x + 8y + 4z = 16$

3ª equação: $2x + 3y - 2z = 15$

Soma: $11y + 2z = 31$ (2)

$$\begin{cases} 6y + z = 17 & \text{Soma (1)} \\ 11y + 2z = 31 & \text{Soma (2)} \end{cases}$$

Resolvendo este sistema menor, temos:

$y = 3$ e $z = -1$

e substituindo y e z na primeira equação:

$x = 2$

Portanto: $V = \{(2, 3, -1)\}$.

Comparando os conjuntos verdade, concluímos que os dois sistemas são equivalentes.

## 48. O MÉTODO DE TRANSFORMAÇÃO PARA RESOLVER SISTEMAS LINEARES

**48.1.** Acompanhemos as diversas fases da resolução do ítem anterior:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ -x + 4y + 2z = 8 \\ 2x + 3y - 2z = 15 \end{cases}$$

Efetuando, apenas, o produto de equação por um número real e somas de equações, conseguimos substituir o sistema inicial por outro,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ 6y + z = 17 \\ 11y + 2z = 31 \end{cases}$$

Este novo sistema, sabemos ser equivalente ao sistema dado, porque as operações efetuadas não incluem novas soluções e não eliminam soluções existentes.

Logo, os dois sistemas têm o mesmo conjunto verdade.

A matriz completa do primeiro sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ -1 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & 15 \end{pmatrix}$$

A matriz completa do segundo sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & 17 \\ 0 & 11 & 2 & 31 \end{pmatrix}$$

Observamos que, com este processo, alteramos a matriz completa do sistema dado, sem alterar seu conjunto verdade.

Nosso objetivo é conseguir um sistema, equivalente ao sistema inicial, cuja matriz completa associada contenha o maior número possível de zeros.

O ideal é se conseguir a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ pois o sistema associado é:

$$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = 2 \\ 0.x + 1.y + 0.z = 3 \\ 0.x + 0.y + 1.z = -1 \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

cujo conjunto verdade é: V = { ( 2 , 3 , -1 ) }

Para que o processo seja realmente vantajoso, devemos adotar uma sistemática para o cálculo: procuramos transformar uma coluna de cada vez para a forma desejada; e, em cada coluna o número 1 deve ser procurado em primeiro lugar.

Usaremos o seguinte dispositivo, onde os cálculos são descritos à direita:

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| 1   2   -1   9 | |
| -1   4   2   8 | matriz completa associada |
| 2   3   -2   15 | |
| 1   2   -1   9 | cópia da 1ª linha anterior |
| 0   6   1   17 | (2ª linha) + (1ª linha) |
| 0   -1   0   -3 | (3ª linha) + (-2) · (1ª linha) |
| 1   2   -1   9 | cópia da 1ª linha anterior |
| 0   1   $\frac{1}{6}$   $\frac{17}{6}$ | $\frac{1}{6}$ × (2ª linha anterior) |
| 0   -1   0   -3 | cópia da 3ª linha anterior |
| 1   0   $-\frac{4}{3}$   $\frac{10}{3}$ | (1ª linha) + (-2) · (2ª linha) |
| 0   1   $\frac{1}{6}$   $\frac{17}{6}$ | cópia da 2ª linha anterior |
| 0   0   $\frac{1}{6}$   $-\frac{1}{6}$ | (3ª linha) + (2ª linha) |
| 1   0   $-\frac{4}{3}$   $\frac{10}{3}$ | cópia da 1ª linha anterior |
| 0   1   $\frac{1}{6}$   $\frac{17}{6}$ | cópia da 2ª linha anterior |
| 0   0   1   -1 | 6 · (3ª linha anterior) |
| 1   0   0   2 | (1ª linha) + $(\frac{4}{3})$ · (3ª linha) |
| 0   1   0   3 | (2ª linha) + $(-\frac{1}{6})$ · (3ª linha) |
| 0   0   1   -1 | cópia da 3ª linha anterior |

## 48.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 39

1. Resolva o sistema:
$$\begin{cases} 2x - 3y + \phantom{2}z = -1 \\ x + 2y - \phantom{2}z = 3 \\ 4x + \phantom{2}y + 2z = 5 \end{cases}$$

pelo método de transformações:

Observe, inicialmente, que você deverá obter $a_{11} = 1$. Como a ordem das equações não altera o sistema, será vantajoso resolver

$$\begin{cases} x + 2y - \phantom{2}z = 3 \\ 2x - 3y + \phantom{2}z = -1 \\ 4x + \phantom{2}y + 2z = 5 \end{cases}$$

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| 1 2 −1 3<br>2 −3 1 −1<br>4 1 2 5 | matriz completa associada |
| 1 2 −1 3<br>0 −7 3 −7<br>0 −7 6 −7 | cópia da 1ª linha anterior<br>(2ª linha) + (−2) . (1ª linha)<br>(3ª linha) + (−4) . (1ª linha) |
| 1 2 −1 3<br>0 1 −3/7 1<br>0 −7 6 −7 | cópia da 1ª linha anterior<br>(−1/7) x (2ª linha anterior)<br>cópia da 3ª linha anterior |
| 1 0 −1/7 1<br>0 1 −3/7 1<br>0 0 3 0 | (1ª linha) + (−2) . (2ª linha)<br>cópia da 2ª linha anterior<br>(3ª linha) + (7) . (2ª linha) |
| 1 0 −1/3 1<br>0 1 −3/7 1<br>0 0 1 0 | cópia da 1ª linha anterior<br>cópia da 2ª linha anterior<br>(1/3) x (3ª linha anterior) |
| 1 0 0 1<br>0 1 0 1<br>0 0 1 0 | (1ª linha) + (1/7) . (3ª linha)<br>(2ª linha) + (3/7) . (3ª linha)<br>cópia da 3ª linha anterior |

A matriz do sistema e a matriz completa associada ao sistema transformado, são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O sistema transformado é:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

cujo conjunto verdade é: $V = \{ (1, 1, 0) \}$

2. Resolva o sistema pelo método de transformações:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + 6y + z = 12 \\ 3x + 4y - z = 6 \end{cases}$$

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| 1  2  -3  0<br>5  6  1  12<br>3  4  -1  6 | matriz completa associada |
| 1  2  -3  0<br>0  -4  16  12<br>0  -2  8  6 | cópia da 1ª linha anterior<br>(2ª linha) + (-5) (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-3) (1ª linha) |
| 1  2  -3  0<br>0  1  -4  -3<br>0  -2  8  6 | cópia da 1ª linha anterior<br>(-1/4) · (2ª linha)<br>cópia da 3ª linha anterior |
| 1  0  5  6<br>0  1  -4  -3<br>0  0  0  0 | (1ª linha) + (-2) (2ª linha)<br>cópia da 2ª linha anterior<br>(3ª linha) + (2) (2ª linha) |

Se os cálculos estiverem corretos, você deve ter uma linha de zeros em sua última matriz. Se isto não ocorrer, refaça seus cálculos.

O passo seguinte seria conseguir 1 na terceira linha da terceira coluna. Isto porém não é possível já que não se pode dividir por zero. Logo o processo não tem continuidade.

Escreva o sistema de equações associado a esta última matriz completa.

$$\begin{cases} x + 0 \cdot y + 5 \cdot z = 6 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y - 4 \cdot z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Escreva x e y em função de z:

$$\begin{cases} x = -5z + 6 \\ y = 4z - 3 \end{cases} \qquad (*)$$

Faça $z = 0$ e obtenha x e y por estas equações. Temos então $(6, -3, 0)$ que é uma solução deste último sistema e, portanto, também do sistema inicial.

Complete os seguintes ternos ordenados de modo que eles sejam soluções do sistema:

$(1, 1, 1)$

$(-4, 5, 2)$

$(11, -7, -1)$

Isto significa que, para cada valor real, escolhido arbitrariamente, para z, as equações (*) fornecem valores correspondentes para x e y de modo que (x, y, z) pertença ao conjunto verdade do sistema dado.

Isto é, o sistema tem infinitas soluções e:

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} x = -5z + 6 \\ y = 4z - 3 \end{array}, \ z \in R \right\}.$$

3. Resolva o sistema: $\begin{cases} 4x + 5y - 7z = 4 \\ 2x + 7y + z = 20 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ pelo método de transformações.

É vantagem escrever a última equação em primeiro lugar porque o coeficiente de x é 1

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| 1 2 -1 0<br>4 5 -7 4<br>2 7 1 20 | matriz completa associada |
| 1 2 -1 0<br>0 -3 -3 4<br>0 3 3 20 | cópia da 1ª linha anterior<br>(2ª linha) + (-4) . (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-2) . (1ª linha) |
| 1 2 -1 0<br>0 1 1 -4/3<br>0 3 3 20 | cópia da 1ª linha anterior<br>(-1/3) . 2ª linha<br>cópia da 3ª linha anterior |
| 1 0 -3 8/3<br>0 1 1 -4/3<br>0 0 0 24 | (1ª linha) + (-2) . (2ª linha)<br>cópia da 2ª linha anterior<br>(3ª linha) + (-3) . (2ª linha) |

Se os seus cálculos estiverem corretos, a última linha deverá ser (0 0 0 24).

Se isto não ocorrer, refaça os cálculos antes de continuar a leitura.

Agora escreva o sistema associado à última matriz encontrada.

$$\begin{cases} x + 0y - 3z = 8/3 \\ 0x + 1y + 1z = -4/3 \\ 0 = 24 \end{cases}$$

É fácil ver que, nenhum terno (x, y, z) será solução do sistema já que a última igualdade permanecerá inalterada para qualquer terno, e esta é um absurdo (0 = 24!!!).

Logo, o sistema não tem solução e $V = \phi$.

## 48.3. OBSERVAÇÃO

Você notou que o processo de transformações para resolver sistemas lineares consiste em substituir as equações do sistema por outras, através de duas operações:

a) a multiplicação de ambos os membros de uma equação por um mesmo número real.

b) a substituição de uma equação qualquer do sistema por sua soma com outra equação do sistema (que pode ter sido multiplicada por uma constante ou não).

Estas operações alteram a matriz completa associada ao sistema mas não alteram seu conjunto verdade.

Outras modificações podem ser utilizadas.

Por exemplo, em qualquer fase do processo, a ordem das equações pode ser trocada a fim de se evitar o aparecimento de frações.

A posição das colunas também pode ser mudada, contanto que no final, ao se escrever o sistema equivalente resultante, se leve em conta tal alteração.

## 48.4. FAÇA VOCÊ – TAREFA 40

1. Resolva, por transformação, os sistemas:

a) $\begin{cases} 8x + 5y + 3z = 35 \\ 7x + 3y + z = 23 \\ x + y + 2z = -23 \end{cases}$

| Matrizes | Descrição das operações |
|---|---|
| 1 1 2 -23<br>7 3 1 23<br>8 5 3 35 | Matriz completa associada. |
| 1 1 2 -23<br>0 -4 -13 184<br>0 -3 -13 219 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-7) . (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-8) . (1ª linha) |
| 1 1 2 -23<br>0 1 13/4 -46<br>0 -3 -13 219 | cópia da 1ª linha<br>(-1/4) . (2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 0 -5/4 23<br>0 1 13/4 -46<br>0 0 -13/4 81 | (1ª linha) + (-1) . (2ª linha)<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (3) . (2ª linha) |
| 1 0 -5/4 23<br>0 1 13/4 -46<br>0 0 1 -324/13 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(-4/13) . (3ª linha) |
| 1 0 0 -106/13<br>0 1 0 35<br>0 0 1 -324/13 | (1ª linha) + (5/4) . (3ª linha)<br>(2ª linha) + (-13/4) . (3ª linha)<br>cópia da 3ª linha |

Sistema associado: $\begin{cases} x = -\frac{106}{13} \\ y = 35 \\ z = -\frac{324}{13} \end{cases}$

Conjunto verdade: $V = \{(-\frac{106}{13}, 35, -\frac{324}{13})\}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$

| Matrizes | Descrição das operações |
|---|---|
| 1 -1 1 2<br>1 1 -1 0<br>2 -2 3 7 | matriz completa associada |
| 1 -1 1 2<br>0 2 -2 -2<br>0 0 1 3 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-1) . (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-2) . (1ª linha) |
| 1 -1 1 2<br>0 1 -1 -1<br>0 0 1 3 | cópia da 1ª linha<br>(1/2) . (2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 0 0 1<br>0 1 0 2<br>0 0 1 3 | (1ª linha) + (2ª linha)<br>(2ª linha) + (3ª linha)<br>cópia da 3ª linha |

Conjunto verdade: $V = \{(1, 2, 3)\}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ 1x - 7y + 2z = 5 \end{cases}$

| Matrizes | Descrição das operações |
|---|---|
| 1 -2 1 2<br>2 -1 1 1<br>1 -7 2 5 | matriz completa associada |
| 1 -2 1 2<br>0 3 -3 -3<br>0 -5 1 3 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-2).(1ª linha)<br>(3ª linha) + (-1).(1ª linha) |
| 1 -2 1 2<br>0 1 -1 -1<br>0 -5 1 3 | cópia da 1ª linha<br>(1/3).(2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 0 -1 0<br>0 1 -1 -1<br>0 0 -4 -2 | (1ª linha) + (2).(2ª linha)<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (5).(2ª linha) |
| 1 0 -1 0<br>0 1 -1 -1<br>0 0 1 1/2 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(-1/4).(3ª linha) |
| 1 0 0 1/2<br>0 1 0 -1/2<br>0 0 1 1/2 | (1ª linha) + (3ª linha)<br>(2ª linha) + (3ª linha)<br>cópia da 3ª linha |

$V = \{ ( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} ) \}$

d) $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - 5y + 4z = 5 \end{cases}$

| Matrizes | Descrição das operações |
|---|---|
| 1 -2 1 2<br>2 -1 -1 1<br>1 -5 4 5 | matriz completa associada |
| 1 -2 1 2<br>0 3 -3 -3<br>0 -3 3 3 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-2).(1ª linha)<br>(3ª linha) + (-1).(1ª linha) |
| 1 -2 1 2<br>0 1 -1 -1<br>0 -3 3 3 | cópia da 1ª linha<br>(1/3).(2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 0 -1 0<br>0 1 -1 -1<br>0 0 0 0 | (1ª linha) + (2).(2ª linha)<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (3).(2ª linha) |

**O sistema de equações associado a essa última matriz completa é:**

$$\begin{cases} x + 0.y - z = 0 \\ 0.x + y - z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

**Escrevendo x e y em função de z:**

$$\begin{cases} x = z \\ y = z - 1 \end{cases}$$

$\therefore \; V = \{ (x, y, z) \mid \begin{matrix} x = z \\ y = z - 1 \end{matrix}, \; z \in \mathbb{R} \}$

## 49. TRIANGULAÇÃO

O processo de triangulação é o próprio processo de transformação, apenas com economia de alguns cálculos. Consiste em se procurar apenas um triângulo de zeros na matriz do sistema transformado, em lugar da matriz identidade.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x - 5y - z = 1 \\ 5x - 2y + z = 7 \end{cases}$$

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \end{matrix}$ | Matriz completa associada |
| $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & -9 & -18 \end{matrix}$ | Cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-3) (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-5) (1ª linha) |
| $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7/8 & 14/8 \\ 0 & -7 & -9 & -18 \end{matrix}$ | Cópia da 1ª linha<br>(-1/8) × (2ª linha)<br>Cópia da 3ª linha |
| $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7/8 & 14/8 \\ 0 & 0 & -23/8 & -46/8 \end{matrix}$ | Cópia da 1ª linha<br>Cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (7) × (2ª linha) |

O sistema associado à última matriz é:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ y + \frac{7}{8}z = \frac{14}{8} \\ -\frac{23}{8}z = -\frac{46}{8} \end{cases}$$

A última equação fornece:

$$z = \left(-\frac{46}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{23}\right) = +2$$

Substituindo o valor de z na segunda equação temos:

$$y = \frac{14}{8} - \frac{7}{8} \cdot (2) = 0$$

Substituindo z e y na primeira equação temos:

$$x = 5 - 0 - 4 = 1$$

Logo: $V = \{(1, 0, 2)\}$

## 49.1. FAÇA VOCÊ — TAREFA 41

Resolva, por triangulação, os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| 1 1 3 2<br>2 -3 -2 -3<br>3 -2 -1 1 | matriz completa associada |
| 1 1 3 2<br>0 -5 -8 -7<br>0 -5 -10 -5 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-2)(1ª linha)<br>(3ª linha) + (-3)(1ª linha) |
| 1 1 3 2<br>0 1 8/5 7/5<br>0 -5 -10 -5 | cópia da 1ª linha<br>(-1/5). (2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 1 3 2<br>0 1 8/5 7/5<br>0 0 -2 2 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (5). (2ª linha) |

Sistema associado à última matriz:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y + \frac{8}{5}z = \frac{7}{5} \\ -2z = 2 \end{cases}$$

A última equação fornece: $z = -1$

Substituindo temos: $y = \frac{7}{5} + \frac{8}{5} = 3$

e $x = 2 - 3 + 3 = 2$

Logo: $V = \{(2, 3, -1)\}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| 1 1 1 3<br>2 -3 1 0<br>3 3 -2 4 | matriz completa associada |
| 1 1 1 3<br>0 -5 -1 -6<br>0 0 -5 -5 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-2). (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-3). (2ª linha) |

Sistema associado à última matriz:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -5y - z = -6 \\ -5z = -5 \end{cases}$$

A última equação, fornece: $z = 1$

Substituindo: $y = \frac{-6 + 1}{-5} = 1$ e $x = 3 - 1 - 1 = 1$

Logo: $V = \{(1, 1, 1)\}$

## 50. CLASSIFICAÇÃO DO SISTEMA LINEAR QUANTO AO SEU CONJUNTO VERDADE

Já vimos que o conjunto verdade de um sistema linear pode ser vazio, unitário ou ter **infinitos** elementos.

Se o conjunto verdade é unitário, dizemos que o **sistema é determinado**; se o conjunto verdade tem infinitos elementos, o **sistema é indeterminado**; se o conjunto verdade é vazio, o **sistema é impossível.**

### 50.1. SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Um sistema homogêneo é um sistema cujos termos independentes são ...todos nulos........ .

Todo sistema homogêneo admite uma solução que é ...trivial.......... ou seja V = {( ..0.. , ..0.. , ..0.. )} .

Logo, se um sistema é homogêneo, seu conjunto verdade V ..≠..... $\phi$, isto é, um sistema homogêneo é determinado ou ..indeterminado.......... . Ele não pode ser ...impossível........... .

### 50.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 42

1. Resolva o sistema homogêneo seguinte, por triangulação:

$$\begin{cases} x + 2y + 7z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 7x - 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

| Matrizes | Descrição dos Cálculos |
|---|---|
| 1 2 7 0<br>-1 1 2 0<br>7 -4 -5 0 | matriz completa associada |
| 1 2 7 0<br>0 3 9 0<br>0 -18 -54 0 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-7).(1ª linha) |
| 1 2 7 0<br>0 1 3 0<br>0 -18 -54 0 | cópia da 1ª linha<br>(1/3). (2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 2 7 0<br>0 1 3 0<br>0 0 0 0 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (18).(2ª linha) |

O sistema encontrado é:

$$\begin{cases} x + 2y + 7z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -3z \end{cases}$$

Logo o conjunto verdade é:

V = {(x, y, z) | $x = -z$, $y = -3z$ e ....$z \in \mathbb{R}$...... }.

e o sistema é indeterminado.

2. Resolva o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 5x - 2y - 2z = 0 \\ 7x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

É vantajoso escrever o sistema na forma:

$$\begin{cases} z + 3x - y = 0 \\ -2z + 5x - 2y = 0 \\ -5z + 7x + y = 0 \end{cases}$$

| Matrizes | Descrição dos Cálculos |
|---|---|
| 1 3 -1 0<br>-2 5 -2 0<br>-5 7 1 0 | matriz completa associada |
| 1 3 -1 0<br>0 11 -4 0<br>0 22 -4 0 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (2) · (1ª linha)<br>(3ª linha) + (5) · (1ª linha) |
| 1 3 -1 0<br>0 1 -4/11 0<br>0 22 -4 0 | cópia da 1ª linha<br>(1/11) · (2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 3 -1 0<br>0 1 -4/11 0<br>0 0 4 0 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (-22) · (2ª linha) |

O sistema equivalente resultante é:

$$\begin{cases} z + 3x - y = 0 \\ x - \frac{4}{11}y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

Logo, pela terceira equação, y = 0 e, por substituição nas outras equações, x = 0 e y = 0

Logo, V = {( 0 , 0 , 0 )} e o sistema é determinado

3. Escreva em forma de matrizes os sistemas dos exercícios 1. e 2.:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Chamando A' a matriz do primeiro sistema e A a matriz do segundo, temos:

det A' = 0

det A = 44

Logo, A é matriz inversível e A' não é matriz inversível .

Considerando o sistema b) na forma: $A \cdot X = B$

temos: $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B.$

Mas, $A^{-1} \cdot A = I$ e $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ porque B é a matriz nula de ordem 3 x 1.

Logo, $(A^{-1} \cdot A) X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow I \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ como você obteve no exercício 2.

4. Resolva o sistema seguinte, usando qualquer técnica.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| 1 1 1 0<br>2 -1 3 0<br>3 2 -1 0 | Matriz completa associada |
| 1 1 1 0<br>0 -3 1 0<br>0 -1 -4 0 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-2).(1ª linha)<br>(3ª linha) + (-3).(1ª linha) |
| 1 1 1 0<br>0 1 -1/3 0<br>0 -1 -4 0 | cópia da 1ª linha<br>(-1/3).(2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 1 1 0<br>0 1 -1/3 0<br>0 0 -13/3 0 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (2ª linha) |

Sistema associado à última matriz:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{13}{3}z = 0 \end{cases}$$

A última equação fornece: z = ...0

Substituindo, vem: x = ...0 e y = ...0

Conjunto verdade: V = {(..0, ..0, ..0)}

## 51. SISTEMAS NÃO QUADRADOS

Tudo o que foi dito até agora vale para sistemas de m equações a n incógnitas. Porém, nos exemplos e exercícios feitos, sempre tivemos $m = n$, isto é, sistemas quadrados.

**51.1.** Vejamos o que ocorre se $m < n$.

Resolva, por transformação, o sistema: $\begin{cases} x + 2y - 5z = -5 \\ 3x - 2y + z = 9 \end{cases}$ onde m = ..2.. e n = ..3..

| Matrizes | Descrição dos Cálculos |
|---|---|
| 1 2 -5 -5<br>3 -2 1 9 | Matriz completa associada |
| 1 2 -5 -5<br>0 -8 16 24 | Cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-3).(1ª linha) |
| 1 2 -5 -5<br>0 1 -2 -3 | cópia da 1ª linha<br>(-1/8).(2ª linha) |
| 1 0 -1 1<br>0 1 -2 -3 | (1ª linha) + (-2).(2ª linha)<br>cópia da 2ª linha |

O sistema resultante é: $\begin{cases} x - z = ..1.. \\ y - 2z = ..-3.. \end{cases}$ ou seja: $\begin{cases} x = ..1.. + ..z.. \\ y = ..-3.. + ..2z.. \end{cases}$

O conjunto verdade é: $V = \{ (x, y, z) \mid x = 1 + z,\ y = -3 + 2z,\ z \in \mathbb{R} \}$

isto é, o sistema é indeterminado.

**51.2.** Consideremos um sistema em que $m > n$.

Seja:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ -x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

onde $m = 4$ e $n = 3$.

Neste caso, procedemos da seguinte forma.

Extraímos um sistema quadrado, do sistema dado. Por exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

e resolvemos tal sistema. Use o método de triangulação:

| Matrizes | Descrição dos Cálculos |
|---|---|
| 1 2 -1 2<br>2 -3 1 -1<br>3 -1 2 7 | Matriz completa associada |
| 1 2 -1 2<br>0 -7 3 -5<br>0 -7 5 1 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-2) . (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-3) . (1ª linha) |
| 1 2 -1 2<br>0 1 -3/7 5/7<br>0 -7 5 1 | cópia da 1ª linha<br>(-1/7) . (2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1 2 -1 2<br>0 1 -3/7 5/7<br>0 0 2 6 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + 7 . (2ª linha) |

Se os cálculos estão corretos você obteve:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y - \frac{3}{7} z = \frac{5}{7} \\ 2z = 6 \end{cases}$$

Logo temos $z = 3$ e, por substituição $x = 1$ e $y = 2$ isto é, a única solução do sistema menor é:

$$( 1 , 2 , 3 )$$

Verifique se este terno é também solução da equação não utilizada:

$$-x + y - 3z = -8$$

$$-( 1 ) + ( 2 ) - 3( 3 ) = -8$$

Como a resposta é afirmativa, temos: $V = \{ ( 1 , 2 , 3 ) \}$ e o sistema dado é determinado.

## 51.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 43

1. Resolva o sistema não quadrado.

$$\begin{cases} 5x + 8y - 6z = 14 \\ x + y \quad\quad = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + y + z = 8 \end{cases}$$

Considerando, inicialmente o sistema formado pelas três primeiras equações:

$$\begin{cases} x + y \quad = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \\ 5x + 8y - 6z = 14 \end{cases}$$

| Matrizes | Descrição dos Cálculos |
|---|---|
| 1  1  0  4<br>2  3  -2  6<br>5  8  -6  14 | Matriz completa associada |
| 1  1  0  4<br>0  1  -2  -2<br>0  3  -6  -6 | cópia da 1ª linha<br>(2ª linha) + (-2). (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-5). (1ª linha) |
| 1  1  0  4<br>0  1  -2  -2<br>0  0  0  0 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (-3). (2ª linha) |

O sistema equivalente resultante é:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y - 2z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} x = -2z + 6 \\ y = 2z - 2 \end{cases}, \quad z \in R$$

isto é, este sistema admite infinitas soluções, correspondentes aos infinitos valores de $z$ que podem ser escolhidos arbitrariamente.

Verifique se estes valores ainda satisfazem à equação não utilizada:

$$2x + y + z = 8$$

Substituindo $x$ e $y$ em função de $z$ temos:

$$2(-2z + 6) + (2z - 2) + z = 8 \Longrightarrow -4z + 12 + 2z - 2 + z = 8 \Longrightarrow -z = -2 \Longrightarrow z = 2$$

e portanto, $x = 2$ e $y = 2$

Isto é, $V = \{(2, 2, 2)\}$ e o sistema dado é determinado.

2. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 8y - 6z = 14 \\ x + y \quad\quad = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

observando que as três primeiras equações são as mesmas do exercício 1.

Portanto temos, para as três primeiras equações, infinitas soluções:

$$\begin{cases} x = -2z + 6 \\ y = 2z - 2 \end{cases}, \quad \forall z \in R.$$

Substituindo na quarta equação:

$$x + 2y - 2z = 3$$

$$(-2z + 6) + 2(2z - 2) - 2z = 3 \implies -2z + 6 + 4z - 4 - 2z = 3 \implies 2 = 3??$$

Chegamos a um absurdo. Isto significa que nenhum terno (x, y, z) que satisfaz às três primeiras equações, satisfaz também à quarta.

Isto é, $V = \emptyset$ e o sistema é impossível.

3. Resolva o seguinte sistema não quadrado:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$$

Considerando o sistema formado pelas três primeiras equações, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

e resolvendo este sistema por transformação:

| Matrizes | Descrição dos cálculos |
|---|---|
| 1   1   -1   4<br>2   -3   -4   0<br>2   -1   -1   1 | matriz completa associada |
| 1   1   -1   4<br>0   -5   -2   -8<br>0   -3   1   -7 | cópia da 1ª linha anterior<br>(2ª linha) + (-2) . (1ª linha)<br>(3ª linha) + (-2) . (1ª linha) |
| 1   1   -1   4<br>0   1   2/5   8/5<br>0   -3   1   -7 | cópia da 1ª linha<br>(-1/5) . (2ª linha)<br>cópia da 3ª linha |
| 1   0   -7/5   12/5<br>0   1   2/5   8/5<br>0   0   11/5   -11/5 | (1ª linha) + (-1) . (2ª linha)<br>cópia da 2ª linha<br>(3ª linha) + (3) . (2ª linha) |
| 1   0   -7/5   12/5<br>0   1   2/5   8/5<br>0   0   1   -1 | cópia da 1ª linha<br>cópia da 2ª linha<br>(5/11) . (3ª linha) |
| 1   0   0   1<br>0   1   0   2<br>0   0   1   -1 | (1ª linha) + (7/5) . (3ª linha)<br>(2ª linha) + (-2/5) . (3ª linha)<br>cópia da 3ª linha. |

Logo, temos (1, 2, -1) como solução do sistema menor.

Verifique se este terno é solução da equação não utilizada.

$$3x - y - z = 2$$

$$3(1) - (2) - (-1) = 2 \implies 2 = 2$$

Portanto: $V = \{(1, 2, -1)\}$ e o sistema é determinado.

## 52. REGRA DE CRAMER

**52.1.** A regra de Cramer é uma outra maneira de se resolver sistemas quadrados e equações lineares.

Iniciaremos com um exemplo. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 8 \\ x - 2y - z = 1 \\ 2x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$$

A matriz do sistema é a matriz quadrada de ordem 3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Os cofatores relativos aos elementos da primeira coluna são:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 13 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 5$$

Multiplique ambos os membros da primeira equação do sistema por $A_{11}$; os da segunda por $A_{21}$ e os da terceira por $A_{31}$.

O novo sistema obtido, equivalente ao primeiro, é:

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 8 \\ 13x - 26y - 13z = 13 \\ 10x + 25y + 10z = 5 \end{cases}$$

Somando as equações, termo a termo, vem:

$$(3 + 13 + 10)x + (1 - 26 + 25)y + (3 - 13 + 10)z = 26$$

isto é,

$$26x = 26 \Longrightarrow x = 1.$$

Observando o que foi feito, é fácil concluir que para se obter o valor de y, devemos multiplicar todas as equações do sistema pelos cofatores dos elementos da 2ª coluna.

Calcule: $A_{12} = -4$ $\qquad A_{22} = 0$ $\qquad A_{32} = 6$

E o novo sistema é:

$$\begin{cases} -12x - 4y - 12z = -32 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 12x + 30y + 12z = 6 \end{cases}$$

e, somando as equações temos:

$$26y = -26 \Longrightarrow y = -1$$

Para calcular z você deve multiplicar as equações, respectivamente, pelos .......................................... .

$A_{13} = 9$ $\qquad A_{23} = -13$ $\qquad A_{33} = -7$

Logo, temos:

$$\begin{cases} 27x + 9y + 27z = 72 \\ -13x + 26y + 13z = -13 \\ -14x - 35y - 14z = -7 \end{cases}$$

e somando,

$$26z = 52 \Longrightarrow z = 2$$

Portanto o conjunto verdade do sistema é: $V = \{(1, -1, 2)\}$.

**52.2.** Para que você entenda o porque do aparecimento dos zeros nas somas das equações no ítem anterior, vamos repetir o processo literalmente.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

A matriz do sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e os cofatores relativos aos elementos da primeira coluna são:

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A_{21} = -\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A_{31} = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Multiplicando as equações do sistema, respectivamente por $A_{11}$, $A_{21}$ e $A_{31}$, temos o novo sistema:

$$\begin{cases} A_{11}a_{11}x_1 + A_{11}a_{12}x_2 + A_{11}a_{13}x_3 = A_{11}b_1 \\ A_{21}a_{21}x_1 + A_{21}a_{22}x_2 + A_{21}a_{23}x_3 = A_{21}b_2 \\ A_{31}a_{31}x_1 + A_{31}a_{32}x_2 + A_{31}a_{33}x_3 = A_{31}b_3 \end{cases}$$

Somando as três equações e colocando em evidência $x_1$, $x_2$ e $x_3$, temos:

$$\begin{aligned} &(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})\,x_1 + \\ &+ (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})\,x_2 + \\ &+ (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})\,x_3 = \\ &= A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \end{aligned}$$

O coeficiente de $x_1$ é a soma $\sum_{i=1}^{3} a_{i1} A_{i1}$, dos elementos da 1ª coluna da matriz A pelos cofatores relativos aos elementos da 1ª coluna.

Então, pelo **Teorema de Laplace**:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} a_{i1} A_{i1} = \det A}$$

O coeficiente de $x_2$ é a soma $\sum_{i=1}^{3} a_{i2} A_{i1}$, dos elementos da 2ª coluna da matriz A pelos cofatores relativos aos elementos da 1ª coluna.

Então, pelo **Teorema de Cauchy**:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} a_{i2} A_{i1} = 0}$$

O coeficiente de $x_3$ é a soma $\sum_{i=1}^{3} a_{i3} A_{i1}$, dos elementos da 3ª coluna da matriz A pelos cofatores relativos aos elementos da 1ª coluna.

Então, pelo **Teorema de Cauchy**:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} a_{i3} A_{i1} = 0}$$

Observe agora a seguinte matriz, obtida da matriz A por subrstituição da primeira coluna, pelos termos independentes do sistema:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calculando seu determinante pelos elementos da primeira coluna, temos:

$$\det B_1 = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}$$

logo a soma das três equações do sistema transformado é:

$$\boxed{\det A \cdot x_1 = \det B_1}$$

Se $\det A \neq 0$, podemos escrever:

$$\boxed{x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}}$$

## 52.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 44

1. Considere o mesmo sistema $3 \times 3$ (literalmente) e transforme-o multiplicando as equações pelos cofatores relativos aos elementos da 2ª coluna:

$A_{12}$, $A_{22}$ e $A_{32}$

O sistema transformado é:

$$\begin{cases} A_{12}a_{11}x_1 + A_{12}a_{12}x_2 + A_{12}a_{13}x_3 = A_{12}b_1 \\ A_{22}a_{21}x_1 + A_{22}a_{22}x_2 + A_{22}a_{23}x_3 = A_{22}b_2 \\ A_{32}a_{31}x_1 + A_{32}a_{32}x_2 + A_{32}a_{33}x_3 = A_{32}b_3 \end{cases}$$

cuja soma é:

$$\begin{aligned} &(A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + A_{32}a_{31})x_1 + \\ &+ (A_{12}a_{12} + A_{22}a_{22} + A_{32}a_{32})x_2 + \\ &+ (A_{12}a_{13} + A_{22}a_{23} + A_{32}a_{33})x_3 = \\ &= A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \end{aligned}$$

O único coeficiente não nulo é o coeficiente de $x_2$ porque:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i2} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} = \text{Det } A \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{i3}A_{i2} = 0$$

O segundo membro da igualdade é o determinante da matriz:

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Assim temos:

$$\boxed{\det A \cdot x_2 = \det B_2}$$

e, se $\det A \neq 0$,

$$\boxed{x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}}$$

2. Para se obter $x_3$, as equações do sistema devem ser multiplicada pelos cofatores relativos aos elementos da 3ª coluna: $A_{13}$, $A_{23}$ e ......... .

O sistema transformado é:

$$\begin{cases} A_{13}a_{11}x_1 + A_{13}a_{12}x_2 + A_{13}a_{13}x_3 = A_{13}b_1 \\ A_{23}a_{21}x_1 + A_{23}a_{22}x_2 + A_{23}a_{23}x_3 = A_{23}b_2 \\ A_{33}a_{31}x_1 + A_{33}a_{32}x_2 + A_{33}a_{33}x_3 = A_{33}b_3 \end{cases}$$

cuja soma é:

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \det A \cdot x_3 = \det B_3$$

onde:

$$B_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

Isto é: $\boxed{\det A \cdot x_3 = \det B_3}$

e se $\det A \neq 0$, $\boxed{x_3 = \dfrac{\det B_3}{\det A}}$

3. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + 2y + 3z = -8 \\ -x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

Para este sistema temos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -8 & 2 & 3 \\ 16 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -8 & 3 \\ -1 & 16 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -8 \\ -1 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

cujos determinantes são:

$\det A = -16$ $\quad$ $\det B_1 = 88$

$\det B_2 = -136$ $\quad$ $\det B_3 = 104$

Então, usando as fórmulas encontradas:

$$\det A \cdot x = \det B_1 \Longrightarrow -16 \cdot x = 88 \Longrightarrow x = -\frac{11}{2}$$

$$\det A \cdot y = \det B_2 \Longrightarrow -16 \cdot y = -136 \Longrightarrow y = \frac{17}{2}$$

$$\det A \cdot z = \det B_3 \Longrightarrow -16 \cdot z = 104 \Longrightarrow z = -\frac{13}{2}$$

Isto é, $x = -\frac{11}{2}$, $y = \frac{17}{2}$ e $z = -\frac{13}{2}$

Portanto o conjunto verdade do sistema é: $V = \{(-\frac{11}{2}, \frac{17}{2}, -\frac{13}{2})\}$

## 52.4. TEOREMA DE CRAMER

*Um sistema de equações lineares,* n *por* n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

*é equivalente ao sistema*

$$\begin{cases} \det A \cdot x_1 = \det B_1 \\ \det A \cdot x_2 = \det B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \det A \cdot x_n = \det B_n \end{cases}$$

*onde* A *é a matriz do sistema e* $B_i$ *é a matriz obtida de* A *por substituição da i-ésima coluna de* A *pelos termos independentes do sistema.*

**Demonstração**

Para provar o teorema, basta provar que se $1 \leqslant k \leqslant n$, então $\det A \cdot x_k = \det B_k$.

Temos o sistema dado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Multiplicando-se todas as equações, respectivamente, pelos cofatores da matriz A relativos aos elementos da k-ésima coluna, obtemos o sistema equivalente.

$$\begin{cases} A_{1k}a_{11}x_1 + \ldots + A_{1k}a_{1k}x_k + \ldots + A_{1k}a_{1n}x_n = A_{1k}b_1 \\ A_{2k}a_{21}x_1 + \ldots + A_{2k}a_{2k}x_k + \ldots + A_{2k}a_{2n}x_n = A_{2k}b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{nk}a_{n1}x_1 + \ldots + A_{nk}a_{nk}x_k + \ldots + A_{nk}a_{nn}x_n = A_{nk}b_n \end{cases}$$

Somando termo a termo:

$$\begin{aligned} &(A_{1k}a_{11} + A_{2k}a_{21} + \ldots + A_{nk}a_{n1})\,x_1 + \ldots \\ \ldots + &(A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + \ldots + A_{nk}a_{nk})\,x_k + \ldots \\ \ldots + &(A_{1k}a_{1n} + A_{2k}a_{2n} + \ldots + A_{nk}a_{nn})\,x_n = \\ = &\ A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n \end{aligned}$$

O único coeficiente que pode ser não nulo, no primeiro membro da igualdade, é o da incógnita $x_k$, que é a soma:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, a_{ik} = \det A$$

Os outros coeficientes são todos nulos pois a soma dos produtos dos elementos de uma coluna de A pelos cofatores de outra coluna é igual a zero.

O segundo membro é o determinante da matriz $B_k$, isto é, a matriz que se obtém de A por substituição da k-ésima coluna, pelos termos independentes do sistema.

Logo, $\det A \cdot x_k = \det B_k, \quad \forall k: \quad 1 \leqslant k \leqslant n$

o que prova o **teorema de Cramer.**

## 52.5. OBSERVAÇÕES

**52.5.1.** Se $\det A \neq 0$, então o sistema equivalente ao sistema dado, obtido pelo teorema de Cramer, é determinado, isto é, admite uma única solução $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ onde:

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \quad \ldots\ldots, \quad x_n = \frac{\det B_n}{\det A}$$

Logo, o sistema dado é **determinado** se **$\det A \neq 0$.**

**52.5.2.** Se $\det A = 0$ e se $\exists B_k$ tal que $\det B_k \neq 0$ temos, no sistema transformado, uma equação da forma $0 \cdot x_k = \det B_k$ que não admite nenhuma solução.

Logo o sistema transformado é **impossível** e, portanto, também o é o sistema dado.

**52.5.3.** Se $\det A = 0$ e se $\forall k$, $\det B_k = 0$, então, todas as equações do sistema transformado são do tipo $0 \cdot x_k = 0$, que admite qualquer solução.

Assim, o sistema transformado é **indeterminado** e portanto, também o é o sistema dado.

**Resumo:**

Det A $\neq 0 \Longrightarrow$ sistema determinado

Det A $= 0$ e $\begin{cases} \exists i \mid \det B_i \neq 0 \Longrightarrow \text{sistema impossível} \\ \det B_i = 0, \ \forall i \Longrightarrow \text{sistema indeterminado} \end{cases}$

## 52.6. FAÇA VOCÊ – TAREFA 45

1. Determine o conjunto verdade de cada sistema, usando o teorema de Cramer.

a) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$

det A = 10 ; det $B_1$ = 20 ; det $B_2$ = 30 ; det $B_3$ = -10

Sistema transformado

$$\begin{cases} 10 \cdot x = 20 \Longrightarrow x = 2 \\ 10 \cdot y = 30 \Longrightarrow y = 3 \\ 10 \cdot z = -10 \Longrightarrow z = -1 \end{cases}$$

V = {( 2 , 3 , -1 )}

b) $\begin{cases} 4x + 5y - 7z = 4 \\ 2x + 7y + z = 20 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

det A = 0 ; det $B_1$ = -216 ; det $B_2$ = 72 ; det $B_3$ = -72

Sistema transformado

$$\begin{cases} 0 \cdot x = -216 & \text{(Absurdo)} \\ 0 \cdot y = 72 & \text{(Absurdo)} \\ 0 \cdot z = -72 & \text{(Absurdo)} \end{cases}$$

V = ∅

c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + 6y + z = 12 \\ 3x + 4y - z = 6 \end{cases}$ det A = ...0... det $B_1$ = ...0... det $B_2$ = ...0... det $B_3$ = ...0...

Isto significa que o sistema é ...indeterminado... isto é, admite ...infinitas... soluções.

Porém, qual é o conjunto verdade do sistema?

Observe que embora V tenha infinitos ternos (x, y, z), existem ternos ordenados que não estão em V.

Por exemplo, (6, -3, 1) ∉ V porque ...6 + 2 (-3) - 3(1) ≠ 0...

O teorema de Cramer permite concluir que V tem infinitos elementos mas não ensina como encontrar tais elementos. Neste caso, uma forma para determinar V é utilizar o método de transformação.

Este sistema já foi resolvido no ítem 48.2. deste capítulo:

$$V = \{(x, y, z) \mid x = -5z + 6, \ y = 4z - 3, \ z \in \mathbf{R}\}.$$

**52.7.** Podemos encontrar condições para a, b e c de modo que o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + 0 + 3z = 2 \\ 0 + by - 2z = 1 \\ x + 0 + cz = 2 \end{cases}$$

### 52.7.1. SEJA DETERMINADO

Para isto, é suficiente que det A ≠ 0.

det A = ...abc - 3b... ≠ 0 ⟹ b ≠ 0 e ac ≠ 3

### 52.7.2. SEJA INDETERMINADO

Devemos ter det A = 0 e det $B_1$ = 0 e ...det $B_2$ = 0... e ...det $B_3$ = 0...

Para que se tenha det A = 0, devemos ter b = 0 ou ac = 3.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & b & -2 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow \det B_1 = \text{...}2bc - 6b\text{...} = 2b(\text{...}c - 3\text{...})$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow \det B_2 = \text{...}ac + 4a - 7\text{...}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det B_3 = \text{...}2ab - 2b\text{...} = 2b(\text{...}a - 1\text{...})$$

Se $b = 0$ temos $\det B_1 = 0$ e $\det B_3 = 0$, e para garantir que também $\det B_2 = 0$, devemos impor:

$$ac + 4a - 7 = 0.$$

Se $b \neq 0$, devemos ter $ac = 3$ e, neste caso:

$$\det B_1 = 0 \Longrightarrow c = 3 \quad e \quad a = 1$$

$$\det B_2 = 0 \Longrightarrow c = 3 \quad e \quad a = 1$$

$$\det B_3 = 0 \Longrightarrow c = 3 \quad e \quad a = 1$$

isto é os três determinantes se anulam simultaneamente para $c = 3$ e $a = 1$.

Logo para que o sistema seja indeterminado devemos ter:

$$b = 0 \quad e \quad ac + 4a = 7$$

ou

$$b \neq 0 \quad e \quad a = 1 \quad e \quad c = 3$$

### 52.7.3. SEJA IMPOSSÍVEL

Devemos ter $\det A = 0$ e $\det B_1 \neq 0$ ou $\det B_2 \neq 0$ ou $\det B_3 \neq 0$.

Se $b = 0$, o único $\det B_i$ que pode não ser nulo é $\det B_2$ e isto ocorre se $ac + 4a - 7 \neq 0$

Se $b \neq 0$ então sempre existe uma matriz $B_i$ que tem determinante não nulo.

Logo o sistema é impossível se $b = 0$ e $ac + 4a - 7 \neq 0$ ou se $b \neq 0$ e $ac = 3$.

## 52.8. FAÇA VOCÊ – TAREFA 46

1. Encontre condição para **m** de modo que o sistema $\begin{cases} mx + y = 2 \\ x + my = 1 \end{cases}$ seja determinado, indeterminado ou impossível.

Para que o sistema seja determinado:

$$\det A \neq 0 \Longrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Longrightarrow m \neq \pm 1$$

Para que seja indeterminado ou impossível:

$$\det A = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Temos: $\det B_1 = 2m - 1$ $\quad \det B_2 = m - 2$

Se $m = 1 \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \det B_1 = 1 \\ \det B_2 = -1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ o sistema é impossível.

Se $m = -1 \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \det B_1 = -3 \\ \det B_2 = -3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ o sistema é impossível

Logo, temos apenas duas possibilidades:

$$\begin{cases} 1)\ m \neq \pm 1 \Longrightarrow \text{sistema determinado} \\ 2)\ m = \pm 1 \Longrightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$$

2. Encontre condição para **k** de modo que o sistema: $\begin{cases} kx - y + z = 3 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ seja determinado, indeterminado ou impossível.

Para que o sistema seja determinado: det A ≠ 0 ⟹ $K^3 - K \neq 0$ ⟹ $k \neq 0$ e $k \neq -1$ e $k \neq 1$

Para que o sistema seja indeterminado ou impossível: det A = 0 ⟹ k = 0 ou K = 1 ou K = -1

Se k = 0, det $B_1$ = -4 ; det $B_2$ = 4 ; det $B_3$ = 4 isto é, o sistema é impossível

Se k = 1, det $B_1$ = 0 ; det $B_2$ = 0 ; det $B_3$ = 0 isto é, o sistema é indeterminado

Se k = -1, det $B_1$ = 0 ; det $B_2$ = 8 ; det $B_3$ = 8, isto é, o sistema é impossível.

Logo temos as seguintes possibilidades: $k \neq 0$ e $k \neq 1$ e $k \neq -1$ ⟹ sistema determinado.

$$\left.\begin{matrix} k = 0 \\ \text{ou} \\ k = -1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \text{sistema impossível}$$

$$k = 1 \Longrightarrow \text{sistema indeterminado}$$

## 53. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Resolva, por transformação, os sistemas:

a) $\begin{cases} -5x + 4y - 7z = 1 \\ -5x - 2y + 3z = -2 \\ 5x - 4y + 6z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 17 \\ 5x + 3y - 2z = 10 \\ 7x + 4y - 5z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 7 \\ 3x - y - z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

2. Resolva, usando qualquer técnica:

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 9x + 4y + 6z = 11 \\ -8x - 3z = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x - y = 37 \\ 8y - 2z = -4 \\ 7z - 3w = -17 \\ 2x + 6w = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ x - y + 3z + 2w = 2 \\ 2x + y + 3z + w = -2 \\ x - 2y + z + 3w = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + z = 14 \\ 2y - x + w = 3 \\ 3x - 2z - w = 11 \\ 4y + z - 3w = 7 \end{cases}$

3. Resolva os seguintes sistemas, usando o teorema de Cramer:

a) $\begin{cases} 8x - 6y = 2 \\ -7x + 9y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \\ 2x + y - 2z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + 4y + 5z = 8 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

## Sequência 2

1. Resolva os seguintes sistemas não quadrados:

a) $\begin{cases} x + t = 0 \\ x + y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + t = 2 \\ -x + y + z = 3 \\ 2x + 2z + t = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 7 \\ 3x - y + 8z = 28 \\ 4x - 2y + 10z = 34 \\ x + y + 3z = 16 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + y - 2z = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3y - 52z = 9 \\ 5x + 4y - 3z = 7 \\ 2x - y - 22z = 10 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$

2. Resolva os três sistemas: **Atenção:** As três primeiras equações são iguais.

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + 6y + z = 12 \\ 3x + 4y - z = 6 \\ x - 2y + z = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + 6y + z = 12 \\ 3x + 4y - z = 6 \\ 2x + y + 6z = 99 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + 6y + z = 12 \\ 3x + 4y - z = 6 \\ 2x + y + 6z = 9 \end{cases}$

## Sequência 3

1. Determine os valores de **p**, de modo que sejam **determinados** os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - 3y + pz = 7 \\ px - y + 8z = 28 \\ 4x - 2y + 10z = 34 \end{cases}$

b) $\begin{cases} px + y + z = 1 \\ x + py + z = 2 \\ x + y + pz = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + py + z = 0 \\ 5x + 4y + 5z = 0 \\ x + y + pz = 0 \end{cases}$

2. Discuta as soluções dos sistemas, segundo os valores do parâmetro **k**:

a) $\begin{cases} x + 2y + 2z = k \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 7 \\ 3x - 8y + z = k \\ 7x - 2y + 10z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} kx + y - z = 4 \\ x + ky + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} kx + y + z + t = 0 \\ x + ky + z + t = 0 \\ x + y + kz + t = 0 \\ x + y + z + kt = 0 \end{cases}$

3. Discuta os sistemas, segundo os valores dos parâmetros **p** e **k**:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - ky + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = p \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 17 \\ 5x - ky - 2z = 10 \\ 7x + 4y - 5z = p \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + ky + z = p \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

4. Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2my = m \\ mx + 2y = p \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + my = m \\ mx + y = 2m \end{cases}$

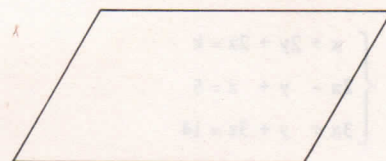
# PROPOSIÇÕES FUNDAMENTAIS

## 54. CONCEITOS PRIMITIVOS

Os conceitos primitivos da Geometria são os que habitualmente são aceitos sem definição: **ponto**, **reta** e **plano**.

Não se pode dizer, sem risco, que os conceitos primitivos são **intuitivos**. Geralmente, uma criança não sabe o que são ponto, reta e plano, senão a partir do uso destas palavras associadas a imagens razoavelmente aproximadas do que elas pretendem significar.

Na formalização matemática da geometria, o que deve caracterizar realmente os conceitos primitivos, são os **postulados**. Isto é, tudo o que se poderá usar como conhecido sobre pontos, retas e planos será aquilo que estiver afirmado por algum postulado.

Os postulados querem garantir que os conceitos primitivos pareçam com as figuras que usamos habitualmente para representá-los:

## 55. OS POSTULADOS DA GEOMETRIA

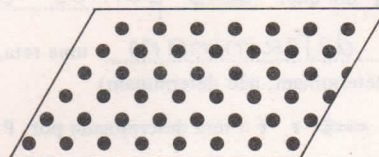
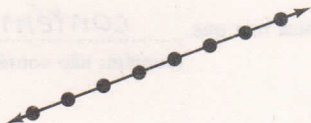
$P_1$ *Existem* **infinitos** *pontos, retas e planos.*

### 55.1. DEFINIÇÕES

1) **Espaço** *é o conjunto de todos os pontos.*

Notação: **E**

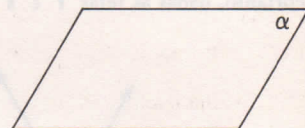
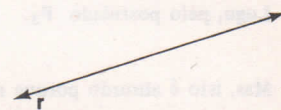
2) **Figura Geométrica** *é qualquer conjunto de pontos, isto é, qualquer subconjunto de* **E**.

$P_2$ *As retas e os planos são conjuntos* **infinitos** *de pontos.*

Pelas definições dadas em 55.1., você pode concluir que:

1) Uma reta r é uma **figura geométrica** porque r é conjunto de pontos: r ...⊂... E.

2) Um plano α é uma ...figura geométrica... porque α ...⊂... E.

3) { A, B, C } , onde A, B e C são pontos, é uma ...figura geométrica...
porque { A, B, C } ⊂ ...E... .

4) { P } , onde P é ponto, é uma ...figura geométrica... porque
{ P } ...⊂ E... .

**Postulados da Reta**

$P_3$ *Dois pontos distintos* **determinam** *uma reta.*

A palavra **determina** em Matemática tem significado preciso. Ela caracteriza a **existência** e a **unicidade** do ente determinado.

Assim, dizer que dois pontos distintos **determinam** uma reta significa que: **existe** uma reta que contém os dois pontos e **não existe outra**, isto é, esta reta é a **única** que contém os dois pontos dados.

Se os pontos são P e Q, então a reta por eles determinada será representada por:

$\overleftrightarrow{PQ}$

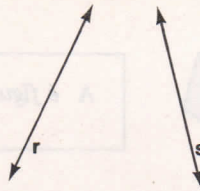
## 55.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 47

Demonstre, baseado apenas no postulado $P_3$, que *"duas retas distintas têm, no máximo, um ponto comum"*.

**Prova**

Sejam r e s duas retas, tais que, $r \neq s$.

Temos duas possibilidades:

$$r \cap s \neq \phi \quad \text{ou} \quad r \cap s = \phi$$

Se $r \cap s \neq \phi$, então existe umponto P $\in$ $r \cap s$.

Suponhamos que existe outro ponto na intersecção: R $\in$ $r \cap s$.

O postulado $P_3$ diz que: dois pontos distintos determinam uma reta

Logo: P e R determinam uma reta, isto é, existe **uma única** reta que contém P e R.
(determinam; não determinam) (contém; não contém)

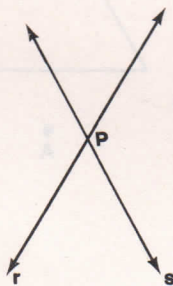
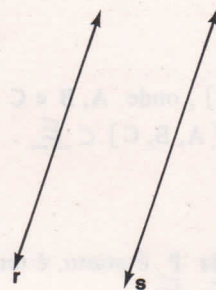
$P \in r$ e $R \in r \Longrightarrow$ r é a reta determinada por P e R.

Mas:

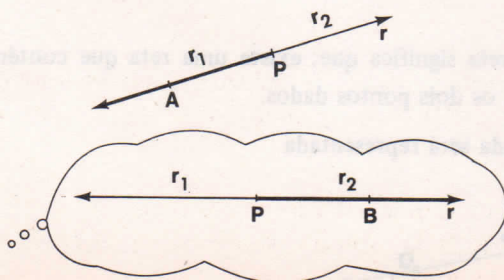
$P \in s$ e $R \in s \Longrightarrow$ s é a reta determinada por P e R

Logo, pelo postulado $P_3$, r = s.
(= ; ≠)

Mas, isto é absurdo porque nossa hipótese era de que $r \neq s$.

Portanto, dadas as retas r e s tais que $r \neq s$, temos duas possibilidades apenas:

$r \cap s = \{P\}$ ou $r \cap s = \phi$

### Voltando aos Postulados da Reta

$P_4$

> **Postulado da Separação da Reta**
>
> *Um ponto* P *de uma reta* r*, determina um par de subconjuntos infinitos (chamados semi-retas de origem* P) *de* r, $(r_1, r_2)$*, tais que:*
>
> $$r_1 \cap r_2 = \{P\} \quad \text{e} \quad r_1 \cup r_2 = r$$

Se $A \in r_1$, denotamos $r_1 = \overrightarrow{PA}$ que se lê: *"semi-reta de origem* P *que passa por* A*"*.

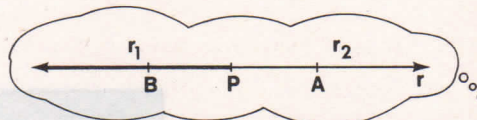
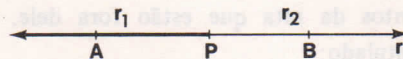
Se $B \in r_2$, denotamos $r_2 = \overrightarrow{PB}$ que se lê: "semi-reta de origem P que passa por B.

## 55.3. DEFINIÇÕES

1) *Diz-se que um ponto* $P \in r$ *está* **entre** *dois pontos* A *e* B, *distintos de* P, *da reta* r, *se* P *determina as semi-retas* $(r_1, r_2)$ *e:*

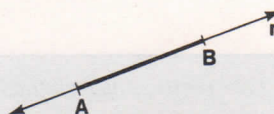
$A \in r_1$ *e* $B \in r_2$

*ou*

$A \in r_2$ *e* $B \in r_1$

$P_5$ **Entre** *dois pontos de uma reta existem* **infinitos** *pontos da reta.*

2) *Dados dois pontos* A *e* B, *de uma reta* r, *chama-se* **segmento** AB, *que se indica por* $\overline{AB}$, *o conjunto intersecção das semi-retas* AB *e* BA.

Em símbolos temos:

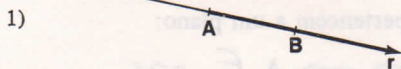
$\overline{AB} = \overrightarrow{AB}$ ....... $\overrightarrow{BA}$

**O conceito de segmento de reta pode ser dado também do seguinte modo:**

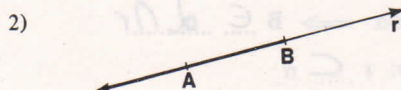
$\overline{AB} = \{A\} \cup \{B\} \cup C$

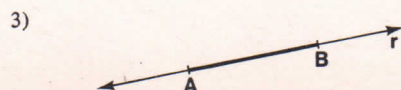
onde: $C = \{P \in r \mid P$ **está entre** ....A.... e ....B....$\}$

## 55.4. FAÇA VOCÊ – TAREFA 48

Complete o que se pede:

1)

A figura geométrica grifada é a ....semi-reta.... de origem ....A...., que indicamos por $\overrightarrow{AB}$.

2)

A figura geométrica grifada é a ....semi-reta.... de origem ....B...., que indicamos por ....$\overrightarrow{BA}$....

3)

A figura geométrica grifada é a intersecção entre $\overrightarrow{AB}$ e ....$\overrightarrow{BA}$...., isto é, ....o segmento.... AB, que indicamos por ....$\overline{AB}$....
(o segmento; a semi-reta)

**55.5.** Os postulados dados ainda não caracterizam satisfatoriamente as retas.

Os postulados $P_2$ e $P_5$ poderiam nos levar a pensar que *entre dois determinados pontos de uma reta já estivessem todos os pontos dessa reta e que não houvessem outros.*

$P_2$: A reta é um conjunto infinito de pontos.

$P_5$: Entre dois pontos de uma reta existem infinitos pontos da reta.

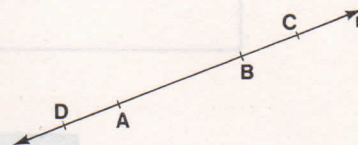
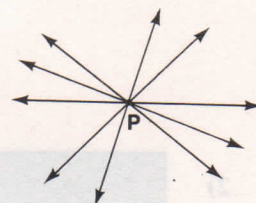
Queremos garantir, porém, que qualquer que seja o segmento de reta, existem pontos da reta que estão fora dele. Para isso, consideramos o seguinte postulado:

$P_6$:

*Dados dois pontos* A e B *de uma reta* r

$\exists C \in r \mid B$ *está entre* A e C

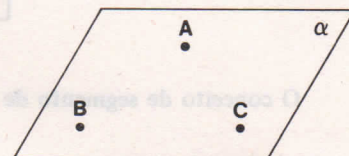
$\exists D \in r \mid A$ *está entre* D e B.

$P_7$:

*Por um ponto passam* infinitas *retas.*

**Postulados do Plano**

$P_8$:

*Três pontos, não alinhados,* determinam *um plano.*

Isto significa que dados três pontos A, B e C não pertencentes a uma mesma reta, existe um ....plano.... que contém os três pontos e este plano é o ....único.... que os contém.

$P_9$:

*Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, a reta está* contida *nesse plano.*

*Simbolicamente:*

Suponhamos que $\alpha$ seja o plano de que fala o postulado, r a reta e A e B os pontos:

— dois pontos de uma reta pertencem a um plano:

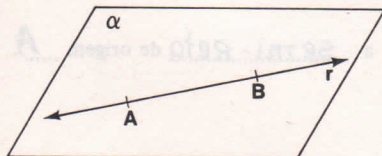
$A \in r$ e $A \in \alpha \implies A$ ..$\in$.. $\alpha \cap r$

($\in$, $\notin$)

$B \in r$ e $B \in \alpha \implies B$ ..$\in$.. ..$\alpha \cap r$..

— reta está contida no plano: r ..$\subset$.. $\alpha$

Logo:

$$\begin{bmatrix} A \in \alpha \cap r \\ B \in \alpha \cap r \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} r \subset \alpha \end{bmatrix}$$

## 55.6. FAÇA VOCÊ – TAREFA 49

1. Prove, usando os postulados que: *"uma reta e um ponto fora dela,* determinam *um plano".*

Prova:

Seja $P \notin r$.

a) O postulado $P_2$ garante que a reta $r$ tem ..........infinitos.......... pontos. Podemos, pois, considerar dois pontos: $A \in r$ e $B \in r$.

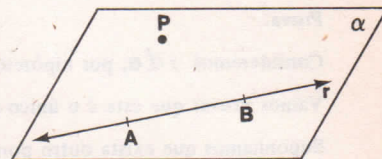
b) O postulado $P_3$ diz que A e B ....determinam uma reta.... Como $P \notin r$, sabemos que A, B e P são pontos não ....alinhados.... .

c) Pelo postulado $P_8$, existe um único plano $\alpha$ tal que A, B e P ....pertencem a $\alpha$

d) Pelo postulado $P_9$, como:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \cap r \\ B \in \alpha \cap r \end{array}\right\} \Longrightarrow r \subset \alpha$$

Logo, existe o plano $\alpha$ que contém a reta r e o ponto P.

e) O plano $\alpha$ é o único plano que contém r e P porque, qualquer outro teria que conter A, B e P e, pelo postulado ....$P_8$.... teria que coincidir com $\alpha$.

2. Prove, usando os postulados que: *"duas retas concorrentes* determinam *um plano".*

Suponhamos:

– r e s concorrentes: $r \cap s =$ ....$\{P\}$

– r e s determinam um plano $\alpha$:

$\exists | \alpha | r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$

Logo, simbolicamente podemos enunciar:

$$\left[ r \cap s = \{P\} \right] \Longrightarrow \left[ \exists | \alpha | r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha \right]$$

Prova:

a) O postulado $P_2$ permite considerar três pontos A, B e P, de modo que:

$A \in s$, $B \in r$ e $P \in$ ....$r \cap s$

b) O postulado $P_3$ e o fato de $r \neq s$ garantem que os três pontos são não ....alinhados....

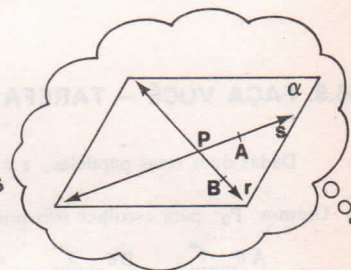
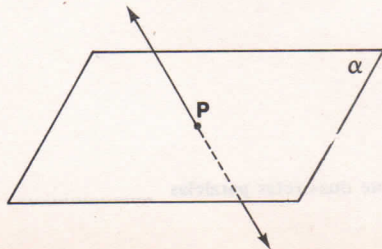
c) Pelo postulado $P_8$ podemos concluir que A, B e P ....determinam um plano $\alpha$.... .

d) Pelo postulado $P_9$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \cap s \\ P \in \alpha \cap s \end{array}\right\} \Longrightarrow s \subset \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} B \in \alpha \cap r \\ P \in \alpha \cap r \end{array}\right\} \Longrightarrow r \subset \alpha$$

Logo, existe o plano $\alpha$ que contém as retas r e s.

e) O plano $\alpha$ é o único plano que contém r e s porque, ....qualquer outro teria que conter A, B e P e, pelo postulado $P_8$ teria que coincidir com $\alpha$.

3. Prove, usando os postulados que: *"se uma reta que não está contida em um plano tem intersecção não vazia com esse plano, então a intersecção é* um ponto".

Suponhamos:

– reta r não contida no plano $\alpha$: $r \not\subset \alpha$

– intersecção entre r e $\alpha$ é não vazia: $r \cap \alpha \neq \phi$

– intersecção entre r e $\alpha$ é um ponto: $\exists P | r \cap \alpha = \{P\}$

Logo, simbolicamente podemos enunciar:

$$\begin{bmatrix} r \not\subset \alpha \\ r \cap \alpha \neq \phi \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \exists P \,/\, r \cap \alpha = \{P\} \end{bmatrix}$$

Prova:

Consideremos $r \not\subset \alpha$, por hipótese. Então, se $r \cap \alpha \neq \phi$, $\exists P \mid P \in r \cap \alpha$

Vamos provar que este é o único ponto da intersecção.

Suponhamos que exista outro ponto Q, $Q \in r \cap \alpha$.

Temos: $P \in r \cap \alpha$ e $Q \in r \cap \alpha$ e, pelo postulado $P_9$, isto implica que $r \subset \alpha$.

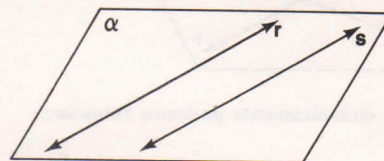
Mas, como $r \not\subset \alpha$ por hipótese, chegamos a um absurdo. Logo, Q não pode existir.

Portanto: $r \cap \alpha = \{P\}$

## 55.7. DEFINIÇÃO

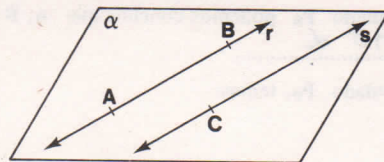
*Duas* retas, *r e s, são* paralelas *se, e somente se, elas são coplanares* (contidas no mesmo plano) *e não têm pontos comuns.*

Em símbolos:

$$r \,/\!/\, s \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha \\ \text{e} \\ r \cap s = \phi \end{cases}$$

## 55.8. FAÇA VOCÊ – TAREFA 50

Dadas duas retas paralelas, r e s, a definição diz que existe um plano que as contém. *Prove* que este plano é único.

a) Usemos $P_2$ para escolher três pontos A, B e C, de modo que:

$A \in r$ (r; s), $B \in r$ (r; s) e $C \in s$ (r; s)

b) Pelo $P_3$ e o fato de $r \neq s$, podemos garantir que A, B e C não são alinhados.

c) Suponhamos que existam dois planos, $\alpha$ e $\beta$, que contenham r e s.

Assim:

$A \in r$ (r; s) e $r \subset \alpha \Longrightarrow A \in \alpha$

$B \in r$ e $r \subset \alpha \Longrightarrow B \in \alpha$

$C \in s$ e $s \subset \alpha \Longrightarrow C \in \alpha$

Do mesmo modo:

$A \in r$ e $r \subset \beta \Longrightarrow A \in \beta$

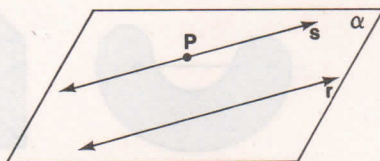
$B \in r$ e $r \subset \beta \Longrightarrow B \in \beta$

$C \in s$ e $s \subset \beta \Longrightarrow C \in \beta$

d) Pelo postulado $P_8$ podemos concluir que $\alpha = \beta$.

*Observação:* Dadas duas retas paralelas, se existe um único plano que as contém, podemos dizer que duas retas paralelas determinam um plano. (determinam; não determinam)

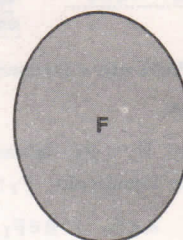
*Um postulado para retas paralelas:* **Postulado de Euclides**

$P_{10}$ *Por um ponto P, não pertencente a uma reta r, existe uma única reta s, paralela à reta dada.*

Em símbolos:

P ∉ r ⟹ ∃| s | s // r e P ∈ s

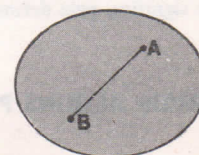
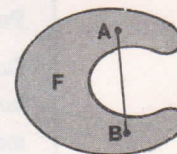
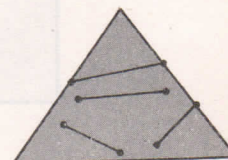
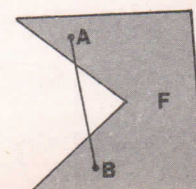
## 55.9. FIGURAS CONVEXAS E FIGURAS CÔNCAVAS

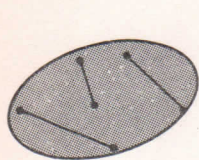
Seja F uma **figura geométrica**. Isto é,

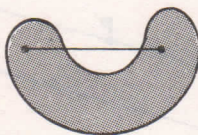
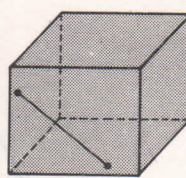
F ⊂ E
(⊂; ⊄)

**Definição:**

F *é* **convexa** *se, e somente se, quaisquer dois pontos de* F *determinam um segmento nela contido.*

Em símbolos:

F é convexa ⟺ ∀A, B ∈ F ⟹ $\overline{AB}$ ⊂ F

Se F não é convexa, diz-se que F é côncava.

Então, um triângulo é uma *figura geométrica convexa* porque, *todo* segmento determinado por dois de seus pontos *está contido* no triângulo.

F, ao lado, é uma figura geométrica côncava (côncava, convexa) porque, *existem* pontos A, B ∈ F cujo segmento AB determinado não está contido em F.

## 55.10. FAÇA VOCÊ – TAREFA 51

1. Identifique as figuras geométricas convexas e as côncavas:

É figura geométrica convexa porque todo segmento determinado por dois de seus pontos está contido nela

É figura geométrica côncava porque existem pontos pertencentes à figura cujo segmento determinado não está contido nela

É figura geométrica côncava porque existem pontos pertencentes à figura cujo segmento determinado não está contido nela

É figura geométrica convexa porque todo segmento determinado por dois de seus pontos está contido nela

É figura geométrica convexa porque todo segmento determinado por dois de seus pontos está contido nela

2. Prove que a intersecção de duas figuras geométricas convexas, é convexa.

Prova:

Sejam $F_1$ e $F_2$, figuras geométricas convexas ; sejam A e B pontos quaisquer da intersecção, $F_1 \cap F_2$.

$A \in F_1$ e $B \in F_1 \Longrightarrow \overline{AB} \subset F_1 \Longrightarrow F_1$ convexa
$(\subset, \not\subset)$

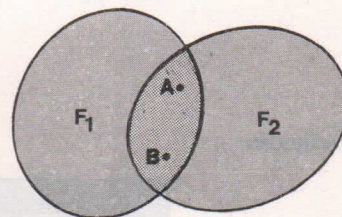
Do mesmo modo:

$A \in F_2$ e $B \in F_2 \Longrightarrow \overline{AB} \subset F_2$ $\quad F_2$ convexa

Assim: $\overline{AB} \subset F_1 \cap F_2$

Logo:

$\forall A, B \in F_1 \cap F_2 \Longrightarrow \overline{AB} \subset F_1 \cap F_2$

Isto significa, pela definição, que $F_1 \cap F_2$ é figura convexa

## 55.11. MAIS ALGUNS POSTULADOS DO PLANO

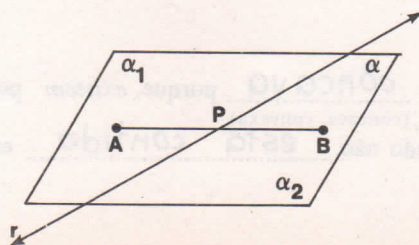
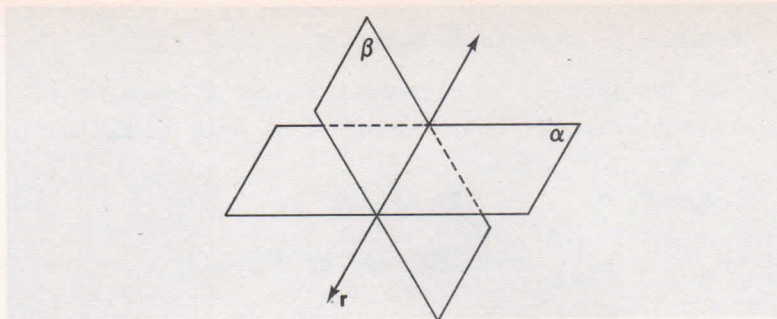
$P_{11}$

**Postulado da Separação do Plano**

*Dada uma reta r e um plano α, fica determinado um par de subconjuntos convexos (chamados semi-planos de origem r) de α, $(\alpha_1, \alpha_2)$, tais que:*

a) $\alpha_1 \cap \alpha_2 = r$ e $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$

b) $\begin{matrix} A \in \alpha_1 \text{ e } A \notin r \\ B \in \alpha_2 \text{ e } B \notin r \end{matrix} \Longrightarrow \exists P \mid \overline{AB} \cap r = \{P\}$

$P_{12}$ *Se dois planos distintos se interceptam, a intersecção é uma reta.*

Suponhamos:

– $\alpha$ e $\beta$ dois planos distintos: $\alpha \neq \beta$ (= ; ≠)

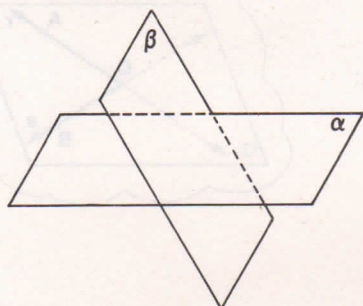
– os dois planos se interceptam: $\alpha \cap \beta \neq \phi$ (= ; ≠)

– a intersecção é uma reta: $\exists r \mid \alpha \cap \beta = r$

Logo, **simbolicamente** podemos enunciar:

$$\alpha \cap \beta \neq \phi \Longrightarrow [\exists r \mid \alpha \cap \beta = r]$$

## 55.12. FAÇA VOCÊ – TAREFA 52

1. Sem usar o postulado $P_{12}$, mostre que *se dois planos distintos se interceptam, não podem ter três pontos não alinhados comuns.*

Suponhamos $\alpha \neq \beta$ e $\alpha \cap \beta \neq \phi$. (= , ≠)

Sejam A, B e C pontos não alinhados tais que:

$A \in \alpha \cap \beta$, $B \in \alpha \cap \beta$, $C \in \alpha \cap \beta$

Pelo postulado $P_8$, se

$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ e

$A \in \beta$, $B \in \beta$, $C \in \beta$ então

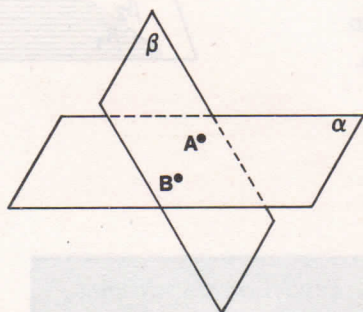
$\alpha = \beta$. (= , ≠)

$P_8$: Três pontos não alinhados determinam um plano.

Mas, isto é absurdo porque, por hipótese, $\alpha \neq \beta$. (= , ≠)

Logo, dois planos distintos que se interseptam, não têm três pontos não alinhados comuns.

2. **Prove,** sem usar o postulado $P_{12}$, que *se dois planos distintos têm dois pontos comuns. então eles têm uma reta comum.*

Prova:

Sejam A e B tais que: $A \in \alpha \cap \beta$ e $B \in \alpha \cap \beta$.

Pelo postulado $P_9$:

$A \in \alpha$, $B \in \alpha$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$

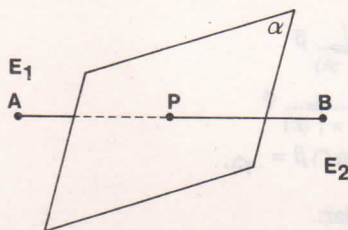
$A \in \beta$, $B \in \beta$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \beta$

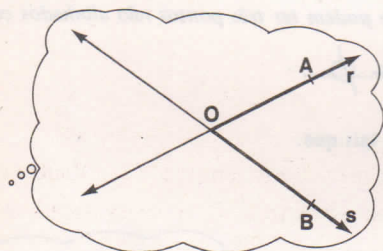
Logo, $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \cap \beta$, isto é, $\overleftrightarrow{AB}$ é reta comum dos planos $\alpha$ e $\beta$.

***Observação:*** A vista dos resultados dos exercícios 1. e 2. não dependerem do $P_{12}$, concluimos que este postulado quer garantir apenas que *a intersecção de dois planos distintos não pode ser um único ponto.*

## 55.13. UM POSTULADO PARA O ESPAÇO

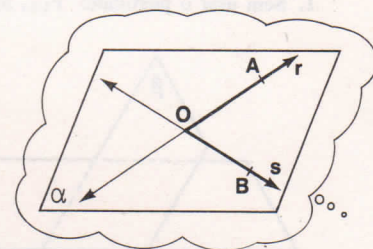
$P_{13}$

> **Postulado da Separação do Espaço**
>
> *Dado um plano $\alpha$, fica determinado um par de subconjuntos convexos (chamados semi-espaços de origem $\alpha$) de E, $(E_1, E_2)$, tais que:*
>
> a) $E_1 \cap E_2 = \alpha$ e $E_1 \cup E_2 = E$
>
> b) $\begin{matrix} A \in E_1 & e & A \notin \alpha \\ B \in E_2 & e & B \notin \alpha \end{matrix} \Longrightarrow \exists P \mid \overline{AB} \cap \alpha = \{P\}$

## 55.14. ÂNGULOS E DIEDROS

1) Considere duas semi-retas de mesma origem, não contidas na mesma reta: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Temos:

$\overrightarrow{OA} \subset$ r e $\overrightarrow{OB} \subset$ s e $r \neq s$.

Pelo exercício 2. do parágrafo 55.12.:

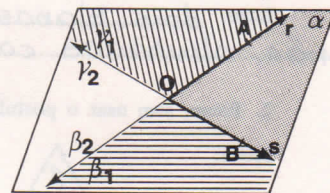
$\exists \mid \alpha \mid r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$

Pelo postulado $P_{11}$, sabemos que r determina dois semi-planos de origem r: $(\beta_1, \beta_2)$. Também s determina dois semi-planos de origem s : $(\gamma_1, \gamma_2)$.

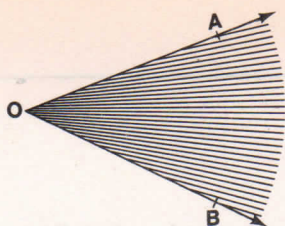
Olhando a figura, podemos notar o conjunto: $\beta_1 \cap \gamma_1$

Temos que:

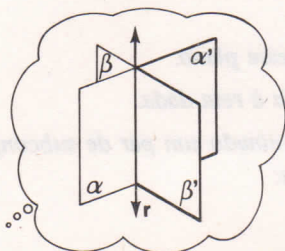
$\overrightarrow{OA} \subset \gamma_1$ e $\overrightarrow{OB} \subset \beta_1$

$(\subset, \not\subset)$

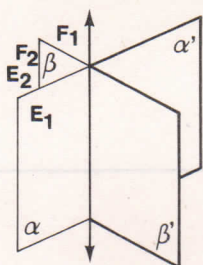
A figura geométrica assinalada $\beta_1 \cap \gamma_1$, é o ângulo AOB ($\hat{AOB}$) cujo *vértice* é o ponto O e os *lados* são as semi-retas OA e OB, de r e s.

**Definição:**

> *São dadas duas semi-retas de mesma origem* O, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, *contidas em retas distintas,* r e s *respectivamente. Chama-se* ângulo AOB *à intersecção dos semi-planos determinados por* r e s, *que contêm as semi-retas* OB *e* OA respectivamente.

*Quanto à convexidade*, um ângulo é uma figura geométrica ....convexa.... , porque é a intersecção de
(convexa; côncava)

..semi-....espaços...... que são figuras geométricas ....convexas...
(convexas; côncavas)

2) Considere dois semi-planos de mesma origem, não contidos no mesmo plano: $\alpha'$ e $\beta'$.

Temos:

$\alpha' \subset \alpha$, $\beta' \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta = r$

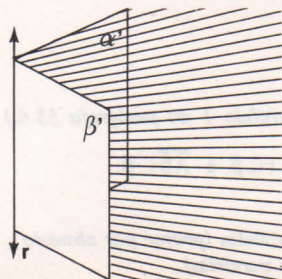
Pelo postulado $P_{13}$, sabemos que $\alpha$ determina dois semi-espaços de origem $\alpha$ : $(E_1, E_2)$.
Também $\beta$ determina dois ....semi-planos.... de origem $\beta$ : $(F_1, F_2)$

Assinale na figura o conjunto: $E_1 \cap F_1$.

Temos que:

$\alpha'$ ...$\subset$... $F_1$ e $\beta'$ ...$\subset$... $E_1$
($\subset$ ; $\not\subset$)

A figura geométrica assim determinada é o **diedro** $\alpha' r \beta'$ ($\alpha' \hat{r} \beta'$) cuja **aresta** é a reta $r$ e cujas **faces** são os semi-planos dados $\alpha'$ e $\beta'$.

**Definição:**

> *São dados dois semi-planos de mesma origem* **r**, *α' e β', contidos em planos distintos, α e β respectivamente. Chama-se* **diedro** *α' r β' à intersecção dos semi-espaços determinados por α e β, que contêm os semi-planos β' e α' respectivamente.*

*Quanto à convexidade*, um diedro é uma figura geométrica ....convexa.... , porque é a intersecção de semi-
(convexa; côncava)

espaços ..... que são figuras geométricas conve-
(convexas;

xas
côncavas)

## 55.15. RECORDANDO OS POSTULADOS. TENTE VISUALIZÁ-LOS

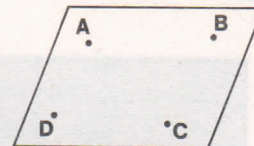
| | |
|---|---|
| $P_1$ | *Existem infinitos pontos, retas e planos.* |
| $P_2$ | *As retas e os planos são conjuntos infinitos de pontos.* |
| $P_3$ | *Dois pontos distintos determinam uma reta.* |
| $P_4$ | *(Separação da Reta) – Um ponto* **P** *de uma reta* **r**, *determina um par de subconjuntos infinitos (chamados semi-retas de origem* **P***) de* **r**, $(r_1, r_2)$, *tais que:* $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ *e* $r_1 \cup r_2 = r$. |
| $P_5$ | *Entre dois pontos de uma reta existem infinitos pontos da reta.* |
| $P_6$ | *Dados dois pontos* **A** *e* **B** *de uma reta* **r**: $\exists C \in r \mid B$ *está entre* **A** *e* **C**<br>$\exists D \in r \mid A$ *está entre* **D** *e* **B**. |
| $P_7$ | *Por um ponto passam infinitas retas.* |
| $P_8$ | *Três pontos, não alinhados, determinam um plano.* |
| $P_9$ | *Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, a reta está contida nesse plano.* |
| $P_{10}$ | *Por um ponto não pertencente a uma reta, existe uma única reta paralela à reta dada.* |
| $P_{11}$ | *(Separação do Plano) – Dada uma reta* **r** *e um plano* $\alpha$, *fica determinado um par de subconjuntos convexos (chamados semi-planos de origem* **r***) de* $\alpha$, $(\alpha_1, \alpha_2)$ *tais que:*<br>a) $\alpha_1 \cap \alpha_2 = r$ e $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$<br>b) $A \in \alpha_1$ e $A \notin r$, $B \in \alpha_2$ e $B \notin r$ $\Longrightarrow \exists P \mid \overline{AB} \cap r = \{P\}$ |
| $P_{12}$ | *Se dois planos distintos se interceptam, a intersecção é uma reta.* |
| $P_{13}$ | *(Separação do Espaço) – Dado um plano* $\alpha$, *fica determinado um par de subconjuntos convexos (chamados semi-espaços de origem* $\alpha$*) de* **E**, $(E_1, E_2)$, *tais que:*<br>a) $E_1 \cap E_2 = \alpha$ e $E_1 \cup E_2 = E$<br>b) $A \in E_1$ e $A \notin \alpha$, $B \in E_2$ e $B \notin \alpha$ $\Longrightarrow \exists P \mid \overline{AB} \cap \alpha = \{P\}$ |

## 56. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Quatro pontos, não coplanares, quantos planos determinam?

2. O conjunto de pontos $\{A, B, C, D\}$ é uma figura geométrica? Justifique.

Esse conjunto pode ser uma figura geométrica convexa? Por quê?

3. Dados dois círculos num plano $\alpha$ tais que as circunferências têm 2 pontos comuns, o plano fica dividido em 4 regiões. Quais são côncavas e quais são convexas?

4. A reunião de dois círculos coplanares pode ser uma figura geométrica convexa? Justifique.

5. Três retas têm apenas um ponto comum. Quantos planos, no máximo, podem ser determinados por elas? Justifique.

6. Critique a seguinte proposição: "A parte de cima da mesa é um plano".

### Sequência 2

1. Mostre que por uma reta passam infinitos planos. *(Sugestão: utilize o* $P_1$ *e o exercício 1 do parágrafo 55.6.)*

2. Prove que, se $r \subset \alpha$, $A \in \alpha$; $A \notin r$ e $B \notin \alpha$, então, não existe um plano $\beta$ tal que $r \subset \beta$ e $\overleftrightarrow{AB} \subset \beta$. *(Sugestão: demonstrar por absurdo utilizando o exercício 1 do parágrafo 55.6.)*

3. Mostre que a condição $a \cap b = \phi$ é condição necessária para que duas retas sejam paralelas (***provar por absurdo***), mas não é condição suficiente. ***(mostrar que existem retas que satisfazem a esta condição mas que não são paralelas).***

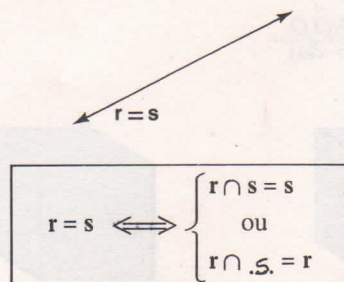
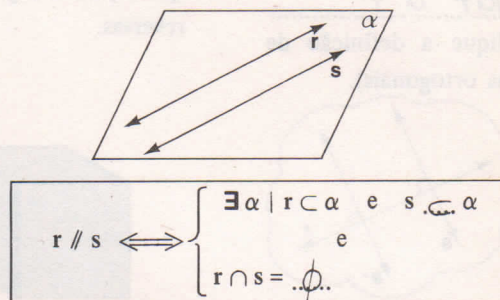
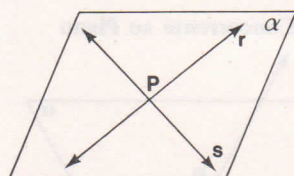
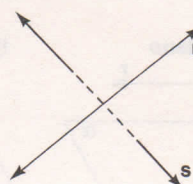
# PARALELISMO E PERPENDICULARISMO

## 57. POSIÇÕES RELATIVAS DE RETAS E PLANOS

### 57.1. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

**a) Retas Iguais ou Coincidentes**

$r = s \iff \begin{cases} r \cap s = s \\ \text{ou} \\ r \cap s = r \end{cases}$

**b) Retas Paralelas**

$r \,//\, s \iff \begin{cases} \exists \alpha \mid r \subset \alpha \ \text{ e } \ s \subset \alpha \\ \text{e} \\ r \cap s = \phi \end{cases}$

**c) Retas Concorrentes**

r e s são concorrentes $\iff \exists P \mid r \cap s = \{O\}$

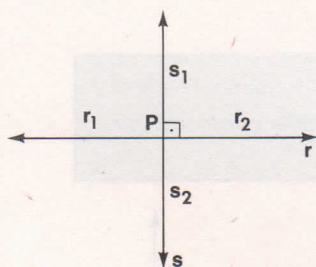
**d) Retas Reversas**

r e s são reversas $\iff \nexists \alpha \mid r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$

(*então,* r e s *reversas* $\implies r \cap s = \phi$ )

### 57.2. RETAS PERPENDICULARES E RETAS ORTOGONAIS

**Definições:**

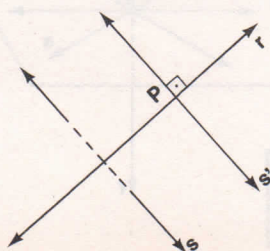
a) *Duas retas são* **perpendiculares** *se, e somente se, elas são concorrentes e determinam quatro ângulos congruentes.*

Se r e s são concorrentes, $\exists P \mid r \cap s = \{P\}$

Sejam $(s_1, s_2)$ as semi-retas de origem P, na reta s e $(r_1, r_2)$ as semi-retas de origem P, na reta r.

Então, os ângulos congruentes são:

$s_1\hat{P}r_1$, $s_1\hat{P}r_2$, $s_2\hat{P}r_2$, $s_2\hat{P}r_1$

Se r e s são retas perpendiculares, *indicamos:* $r \perp s$.

b) *Duas retas,* r e s, *são* **ortogonais** *se, e somente se, qualquer reta concorrente com* r, *e paralela a* s, *é perpendicular a* r.

Seja s' tal que:

– s' é concorrente com r: $\exists P \mid s' \cap r = \{P\}$

– s' é paralela a s: $s' \,//\, s$

Então, se r e s são ortogonais, s' e r são perpendiculares

$s' \perp r$

Se s e r são retas ortogonais, *indicamos:* s ⊥̸ r.

*Observações:*

1) *Duas retas, r e s, perpendiculares são ortogonais* porque qualquer reta concorrente com r e paralela a s, é perpendicular a r. (aplique a definição de retas ortogonais).

2) *Duas retas ortogonais podem ser reversas.*

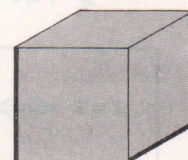
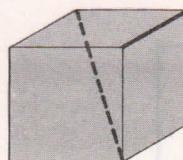
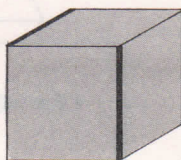
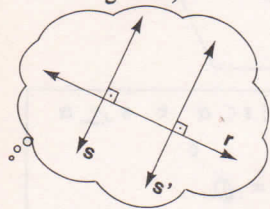
Observe as arestas do cubo.

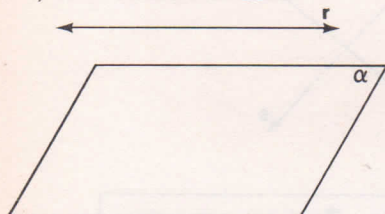
Encontre duas arestas que sejam ortogonais e reversas.

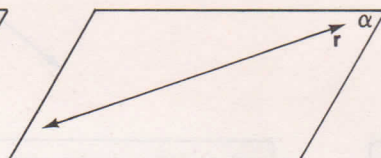
3) *Duas retas reversas podem não ser ortogonais.*

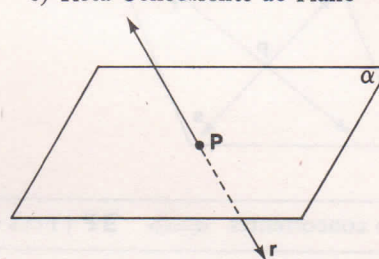
Observe a aresta e a diagonal do cubo assinaladas.

Elas são (são; não são) reversas e não são (são; não são) ortogonais.

4) *Duas retas ortogonais podem não ser perpendiculares* porque podem ser reversas

## 57.3. POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UM PLANO

a) **Reta Paralela ao Plano**

$r \parallel \alpha \iff r \cap \alpha = \phi$

b) **Reta Contida no Plano**

$r \subset \alpha \iff r \cap \alpha = r$

c) **Reta Concorrente ao Plano**

r é concorrente com $\alpha \iff \exists P \mid r \cap \alpha = \{P\}$

*Neste caso, diz-se que* r *"fura"* α *no ponto* P.

## 57.4. RETA PERPENDICULAR A UM PLANO

**Definição:**

> *Uma reta r é perpendicular a um plano α se, e somente se, ela é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto em que r "fura" α.*

Em símbolos:

– r e α são perpendiculares: $r \perp \alpha$

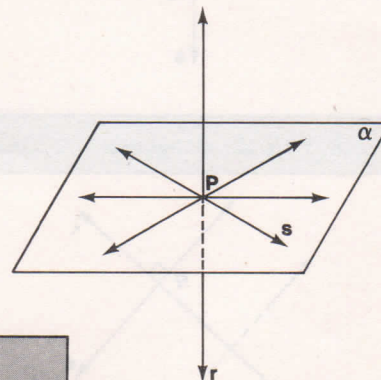
– r fura α no ponto P: $r \cap \alpha = \{P\}$

– s é qualquer reta de α que passa por P:

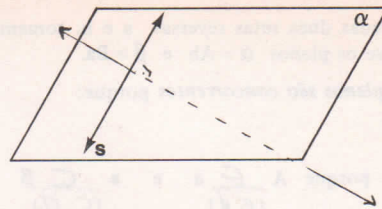
$\forall s \subset \alpha \mid P \in s$
(⊂ ; ⊄) (∈, ∉)

– r e s são perpendiculares: $r \perp s$

Logo, podemos definir:

$$r \perp \alpha \iff \begin{cases} r \cap \alpha = \{P\} \\ \forall s \subset \alpha \mid P \in s, \ r \perp s \end{cases}$$

## 57.5. FAÇA VOCÊ – TAREFA 53

1. Considere uma reta r, perpendicular a uma dada reta s, de um plano $\alpha$. Apenas com o conhecimento deste fato, não podemos afirmar que r é perpendicular a $\alpha$, porque r pode ser perpendicular a uma reta s do plano $\alpha$, sem que seja perpendicular a $\alpha$.

*Complete a figura para ilustrar sua resposta.*

2. Usando as definições de retas ortogonais e de reta perpendicular a um plano, prove que "*se* r *é perpendicular a* $\alpha$*, então* r *é ortogonal a qualquer reta* s *de* $\alpha$".

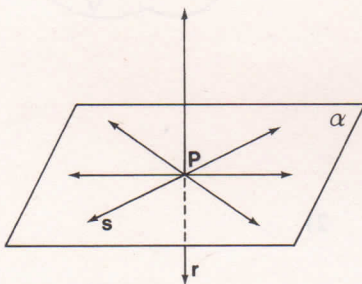
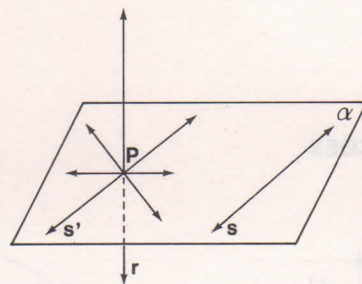
Em *símbolos:*

$$\left[\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ s \subset \alpha \end{array}\right] \Longrightarrow [\, r \text{ ⊥̊ } s \,]$$

Prova:

Seja $r \cap \alpha = \{P\}$. Temos, em $\alpha$, a reta s e o ponto P.

Quanto à posição de P em relação à reta s, temos: $P \in s$ ou $P \notin s$.

a)

Se $P \in s$, pela definição de $r \perp \alpha$, concluímos que $r \perp s$ e, pela observação 1) do parágrafo 57.2., r ⊥̊ s.

b)

Se $P \notin s$, temos, pelo postulado $P_{10}$,

$\exists\, s' \subset \alpha \mid s' /\!/ s$ e $P \in s'$

Como $r \perp \alpha$, concluímos que $r \perp s'$. Assim, temos $r \perp s'$ e $s' /\!/ s$. Logo, pela definição de retas ortogonais, concluímos que r ⊥̊ s.

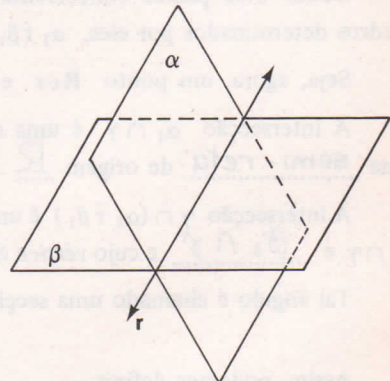
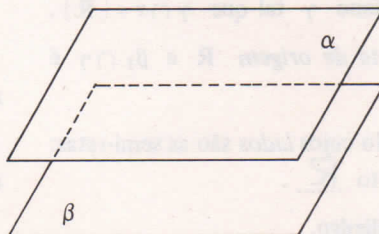
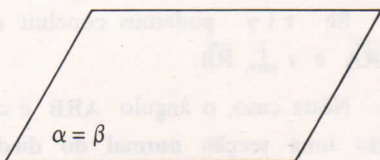
## 57.6. POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS PLANOS

**a) Planos Iguais ou Coincidentes**

$$\alpha = \beta \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = \alpha \\ \text{ou} \\ \alpha \cap \beta = \beta \end{array}\right.$$

**b) Planos Paralelos**

$$\alpha /\!/ \beta \iff \alpha \cap \beta = \emptyset$$

**c) Planos Concorrentes**

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ são concorrentes} \iff \exists\, r \mid \alpha \cap \beta = r$$

## 57.7. FAÇA VOCÊ – TAREFA 54

1. Dadas duas retas reversas a e b, tomam-se os pontos $A \in a$ e $B \in b$ e considera-se os planos $\alpha = Ab$ e $\beta = Ba$.

a) *Os dois planos são concorrentes* porque:

$A \in \alpha$

e

$A \in \beta$ porque A ..$\in$.. a e a ..$\subset$.. $\beta$
($\in, \notin$) ($\subset, \not\subset$)

Logo, A ..$\in$.. $\alpha \cap \beta$
($\in, \notin$)

b) *A reta intersecção de $\alpha$ e $\beta$ é a reta* AB, porque $A \in \alpha \cap \beta$ e temos, que:

$B \in \beta$

e

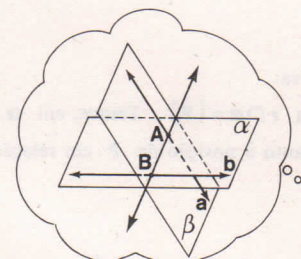
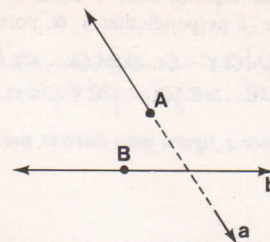
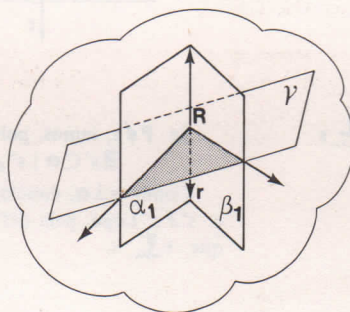
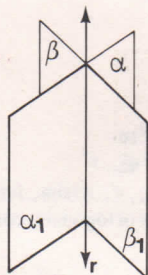
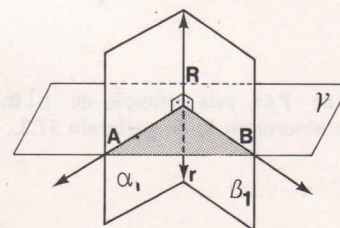
$B \in \alpha$ pois B ..$\in$.. b e b ..$\subset$.. $\alpha$. Logo, B ..$\in$.. $\alpha \cap \beta$.

Então, pelo postulado ..$P_a$.., $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \cap \beta$.

Por outro lado, $\alpha$ e $\beta$ são planos distintos porque a ..$\subset$.. $\beta$ e b ..$\subset$.. $\alpha$ e a e b são retas distintas.

Logo, pelo postulado ..$P_{12}$.., $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$.

## 57.8. DEFINIÇÕES

1)

Dados dois planos concorrentes $\alpha \cap \beta = r$, consideremos um dos diedros determinados por eles, $\alpha_1 \hat{r} \beta_1$.

Seja, agora, um ponto $R \in r$ e um plano $\gamma$ tal que $\gamma \cap r = \{R\}$.

A intersecção $\alpha_1 \cap \gamma$ é uma *semi-reta de origem* **R** e $\beta_1 \cap \gamma$ é uma ..semi-reta.. de origem ..R.. .

A intersecção $\gamma \cap (\alpha_1 \hat{r} \beta_1)$ é um **ângulo** cujos *lados* são as semi-retas: $\alpha_1 \cap \gamma$ e ..$\beta_1 \cap \gamma$.. e cujo *vértice* é o ponto ..R.. .

Tal ângulo é chamado uma **secção do diedro.**

2)

Considere o diedro $\alpha_1 \, r \, \beta_1$ e, pelo ponto $R \in r$, um plano $\gamma$.

Seja: $\gamma \cap (\alpha_1 \hat{r} \beta_1) = A\hat{R}B$.

Se $r \perp \gamma$ podemos concluir que $r \perp \overrightarrow{RA}$ e r ..$\perp$.. $\overrightarrow{RB}$.

Neste caso, o ângulo **ARB** é chamado uma **secção normal do diedro.**

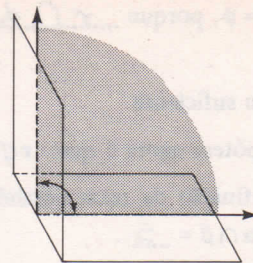
Assim, podemos definir:

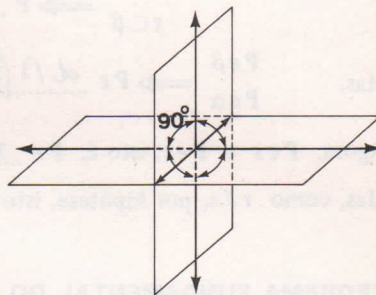
> **$A\hat{R}B$** *é secção normal do diedro* $\alpha_1 \, r \, \beta_1 \iff$ *a aresta* **r** *do diedro é perpendicular aos lados* $\overrightarrow{RA}$ *e* $\overrightarrow{RB}$ *do ângulo* **ARB.**

## 57.9. PLANOS PERPENDICULARES

**Definição:**

*Chama-se* **medida de um diedro** *à medida de uma secção normal do diedro.*

Um **diedro reto** é, portanto, um diedro cuja secção normal é um ângulo reto, isto é, mede ...90°...

**Definição:**

*Dois planos são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e determinam quatro diedros retos.*

# 58. TEOREMAS FUNDAMENTAIS

## 58.1. TEOREMA FUNDAMENTAL DO PARALELISMO DE RETA E PLANO

*A condição necessária e suficiente para que uma reta, não contida num plano, seja paralela ao plano é que ela seja paralela a uma reta do plano.*

*Simbolicamente:*

$$r \,/\!/\, \alpha \iff \begin{cases} r \not\subset \alpha \\ \text{e} \\ \exists\, s \subset \alpha \mid r \,/\!/\, s \end{cases}$$

Para provar o teorema, devemos distinguir duas partes:

a) a **condição necessária**, isto é, o teorema no sentido $\Longrightarrow$

b) a **condição suficiente**, isto é, o teorema no sentido $\Longleftarrow$

**Prova:**

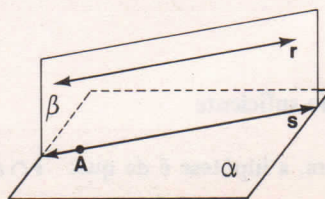
a) **condição necessária**

A hipótese é que r ...⫽... $\alpha$, e isto, por definição, significa $r \cap \alpha =$ ...$\emptyset$...,

e, portanto $r \not\subset \alpha$.

Seja **A** um ponto qualquer de $\alpha$.

Como $A \notin r$, sabemos que **A** e **r** determinam um plano, isto é,

$\exists \mid \beta \mid r$ ...$\subset$... $\beta$ e A ...$\in$... $\beta$

Por outro lado, $A \in \alpha$ e $A \in \beta \Longrightarrow A \in$ ...$\alpha \cap \beta$... e, pelo postulado $P_{12}$, $\exists s \mid$ ...$\alpha \cap \beta$... = ...s... e, $A \in s$.

Temos as retas r e s coplanares, porque ...r e s são retas do plano β...
e $r \cap s = \phi$, porque ...$r \cap \alpha = \phi$ e $s \subset \alpha$... . Logo, $r$ ...//... s.

b) **condição suficiente**

A hipótese agora é que: $r \not\subset \alpha$ e $\exists s \subset \alpha \mid$ ...r // s... .

A definição de retas paralelas garante que $\exists \beta \mid r \subset \beta$ e ...s... $\subset \beta$.

Logo: $\alpha \cap \beta =$ ...s... .

*Faça a figura com tais elementos.*

Se r não fôr paralela a $\alpha$: $\exists P \mid r \cap \alpha =$ ...{P}...

Então, teremos: $\begin{matrix} P \in r \\ r \subset \beta \end{matrix} \Longrightarrow P$ ...∈... $\beta$

Mas, $\begin{matrix} P \in \beta \\ P \in \alpha \end{matrix} \Longrightarrow P \in$ ...$\alpha \cap \beta$... $\Longrightarrow P$ ...∈... s

Agora, $P \in s$ e $P \in r$, isto é, $P \in$ ...r... $\cap$ ...s... .

Mas, como $r \parallel s$, por hipótese, isto é um absurdo. Portanto, devemos ter: $r \parallel \alpha$.

## 58.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO PERPENDICULARISMO DE RETA E PLANO

*A condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que ela seja perpendicular a duas retas do plano, que passam pelo ponto onde a reta dada fura o plano.*

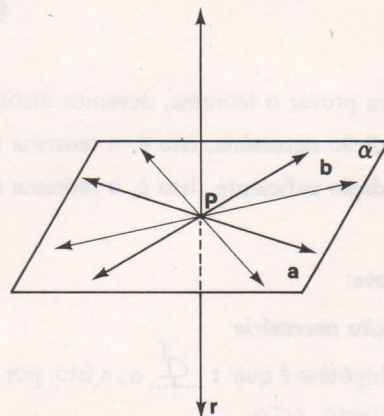
*Simbolicamente:*

$$r \perp \alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} r \cap \alpha = \{P\} \\ \quad e \\ \exists\, a, b \subset \alpha \mid r \perp a, \ r \perp b \end{cases}$$

**Prova:**

a) **condição necessária**

A hipótese é de que $r \perp \alpha$. Logo, por definição, r é ...perpendicular... a todas as retas de $\alpha$ que ...passam pelo ponto P onde r fura α...

Logo, $\exists\, a, b \subset \alpha \mid r$ ...⊥... a; r ...⊥... b.

b) **condição suficiente**

Agora, a hipótese é de que: $r \cap \alpha = \{P\}$ e ...$\exists a, b \subset \alpha \mid r \perp a, r \perp b$... .

Para provar que $r \perp \alpha$, devemos provar que r é perpendicular a qualquer outra reta $c \subset \alpha$, que passa por P.

Para isto, *faça a seguinte construção:*

1) Considere os pontos $A \in a$ e $B \in b$ em semi-planos de $\alpha$, opostos em relação à reta c.

   Seja $\{C\} = \overline{AB} \cap c$ (a existência do ponto C é garantida pelo postulado ..$P_{11}$..).

2) Considere pontos distintos $S \in r$ e $S' \in r$ tais que $\overline{SP}$ e $\overline{S'P}$ tenham a mesma medida.

3) Trace os segmentos: $\overline{AS}, \overline{CS}, \overline{BS}$ e $\overline{AS'}, \overline{CS'}, \overline{BS'}$.

   Agora, você está em condições de provar que:

   1º) $\triangle SAB \equiv \triangle S'AB$ (caso LLL)

   $\overline{SA} \equiv \overline{S'A}$ porque $A \in a$, mediatriz do $\overline{SS'}$

   $\overline{SB} \equiv \overline{S'B}$ porque ..$B \in b$, mediatriz de $\overline{SS'}$..

   $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ porque é lado comum.

   Logo, $S\hat{A}B$ ..$\equiv$.. $S'\hat{A}B$

   2º) $\triangle SAC \equiv \triangle S'AC$ (caso LAL)

   $\overline{SA} \equiv \overline{S'A}$

   $S\hat{A}C \equiv S'\hat{A}C$ porque ..$S\hat{A}B \equiv S'\hat{A}B$ e $C \in \overline{AB}$..

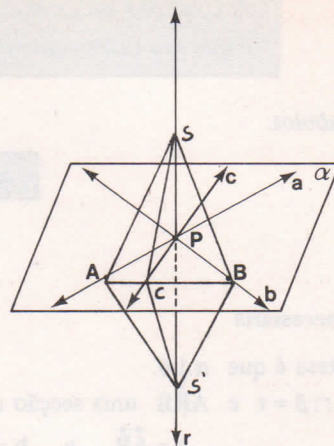
   $\overline{AC} \equiv \overline{AC}$ porque ..é lado comum..

   Logo, $\overline{SC}$ ..$\equiv$.. $\overline{S'C}$.

   3º) $\triangle SCS'$ é isósceles porque ..$\overline{SC} \equiv \overline{S'C}$.. .

   4º) O ponto P é médio do $\overline{SS'}$. Logo, $\overline{CP}$ é ..mediana.. do $\triangle SCS'$.

   Como $\triangle SCS'$ é isósceles, a mediana coincide com a ..altura.. .

   Logo, $\overline{CP} \perp \overline{SS'}$ e, portanto, $c \perp r$.

## 58.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 55

Prove que, *se dois planos são perpendiculares e um deles contém uma reta perpendicular à intersecção, então a reta é perpendicular ao outro.*

Em *símbolos:*

$$\left[\begin{matrix} \alpha \perp \beta, \ \alpha \cap \beta = r \\ a \subset \alpha, \ r \perp a \end{matrix}\right] \Longrightarrow [a \perp \beta]$$

Prova:

*Complete a figura com os elementos da hipótese.*

Seja $a \cap r = \{R\}$

Considere a reta $b \subset \beta$ de modo que: $R \in b$ e $b \perp r$, *localizando-a na figura.*

Chamemos γ o plano determinado pelas retas concorrentes a e b.

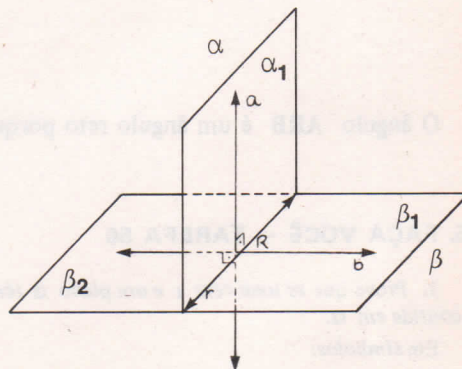
Temos: $r \perp a$ e r..$\perp$.. b.

Então, pelo teorema do parágrafo 58.2., concluímos que: ..$r \perp \gamma$.. .

Mas, $\gamma \cap (\alpha_1 \hat{r} \beta_1)$ é uma secção normal do diedro $\alpha_1 r \beta_1$ porque

..a aresta r do diedro é perpendicular às retas a e b, suportes da secção.. .

Como $\alpha \perp \beta$, temos que a e b determinam ângulos ..retos.., isto é, que medem ..90°.. . Logo, $a \perp b$.

Assim, $a \perp b$, $a \perp r$ e b, r estão em β. Então, pelo teorema do parágrafo 58.2., ..$a \perp \beta$.. .

## 58.4. TEOREMA FUNDAMENTAL DO PERPENDICULARISMO DE DOIS PLANOS

*A condição necessária e suficiente para que dois planos sejam perpendiculares é que um deles contenha uma reta perpendicular ao outro.*

Em *símbolos:*

**Prova:**

a) **condição necessária**

A hipótese é que $\alpha \perp \beta$.

Seja $\alpha \cap \beta = r$ e $\mathbf{A\hat{R}B}$ uma secção normal do diedro $\alpha_1 r \beta_1$.

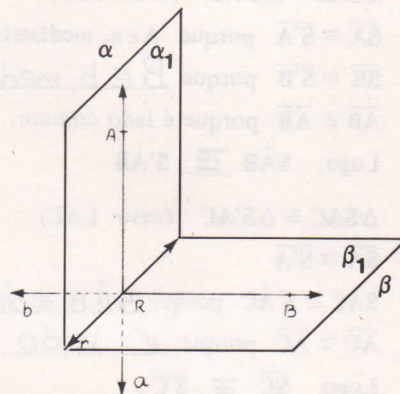
Sejam: $a = \overleftrightarrow{AR}$ e $b = \overleftrightarrow{BR}$

*Complete a figura com esses elementos.*

Como $\mathbf{A\hat{R}B}$ é secção normal de $\alpha_1 \hat{r} \beta_1$, temos:

$a \subset \alpha$ e $a \perp r$

$b \subset \beta$ e $b \perp r$

Mas, $\begin{matrix} a \perp r \\ a \perp b \end{matrix} \Longrightarrow a \perp \beta$ (pelo teorema do parágrafo 58.2.)

b) **condição suficiente**

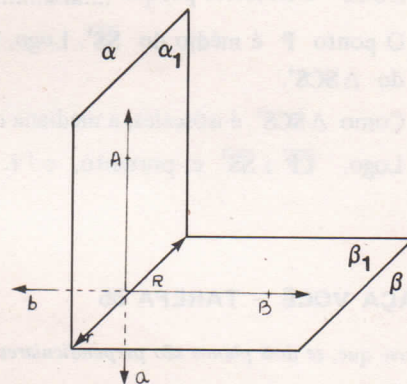
Agora a hipótese é que $\exists a \mid a \subset \alpha$ e $a \perp \beta$ e queremos provar que $\alpha \perp \beta$, isto é, se $\alpha \cap \beta = r$, então uma secção normal do diedro $\alpha_1 r \beta_1$ é um ângulo reto.

Vamos construir uma secção normal:

Seja $a \cap \beta = \{R\}$. Então $R \in r$ porque $R \in \alpha \cap \beta$ e $\alpha \cap \beta = r$.

Seja $b \subset \beta \mid R \in b$ e $b \perp r$.

Seja $A \in \alpha_1$, um ponto de a e $B \in \beta_1$, um ponto de b.

*Complete a figura com tais elementos.*

O ângulo **ARB** é uma secção normal do diedro $\alpha_1 r \beta_1$ porque a aresta r do diedro é perpendicular às retas, a e b, suportes dos lados desse ângulo.

$r \perp b$
e
$a \subset \alpha$ e $a \perp \beta$
$\Longrightarrow a \perp r$

O ângulo **ARB** é um ângulo reto porque $\begin{matrix} a \perp \beta \\ b \subset \beta \end{matrix} \Longrightarrow a \perp b$ e $a \cap b = \{R\}$ e $A \in a$ e $B \in b$.

## 58.5. FAÇA VOCÊ – TAREFA 56

1. Prove que *se uma reta* r *e um plano* α *têm um ponto comum e são ambos perpendiculares a um mesmo plano* β, *então, a reta* r *está contida em* α.

Em *símbolos:*

$$\left[\begin{matrix} \exists P \mid P \in r \cap \alpha \\ r \perp \beta \text{ e } \alpha \perp \beta \end{matrix}\right] \Longrightarrow [r \subset \alpha]$$

Prova:

*Complete a figura com os seguintes elementos:*

a) $\alpha \cap \beta = s$ e $r \cap \beta = \{R\}$

b) considere, em $\beta$, a reta b de modo que: $R \in b$, $b \perp s$ e $b \cap s = \{A\}$.

c) r e b são retas ....concorrentes...... em R e, portanto, determinam um plano $\gamma$ de modo que: $\gamma \cap \beta =$ ..b.. .

d) $\gamma$ e $\alpha$ têm dois pontos comuns, ..A.. e ..P.. . Logo, $\gamma$ e $\alpha$ têm uma reta comum, ..$\overleftrightarrow{AP}$.. .

Chame a essa reta: $\alpha \cap \gamma =$ ..a.. .

Vamos mostrar que $(\alpha_1 \hat{s} \beta_1) \cap \gamma$ é uma secção normal do diedro $\alpha_1 s \beta_1$.

De fato, $s \perp b$, por construção. Resta mostrar que $s \perp a$.

Mas, $r \perp \beta$, por hipótese e $s \subset \beta \implies r$ ..$\perp$.. s.

Temos, então, $s \perp r$, $s \perp b$, $r \cap b = \{R\} \implies s$ ..$\perp$.. $\gamma$.

Então, se $s \perp \gamma$ e $a \subset \gamma$, temos s ...... a.

Logo,, $(\alpha_1 \hat{s} \beta_1) \cap \gamma$ é uma secção normal do ..diedro $\alpha_1 r \beta_1$..

Mas, olhando para o $\triangle PRA$, temos:

$P\hat{R}A$ tem medida ..90°.. porque $r \perp \beta \implies r$ ..$\perp$.. b.

$R\hat{A}P$ tem medida ..90°.. porque a ..$\perp$.. b.

Logo, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é ..180°.. , concluimos que $r = a$. Portanto, r ..$\subset$.. $\alpha$.

2. Prove que *se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano $\alpha$, então elas são paralelas entre si.*

Em *símbolos:*

$$[r \perp \alpha \text{ e } s \perp \alpha] \implies [r \parallel s]$$

Prova:

Seja $r \cap \alpha = \{R\}$ e $s \cap \alpha = \{S\}$ e chamemos $t = \overleftrightarrow{RS}$.

Sabemos que $t \subset \alpha$ pelo postulado ..$P_9$.. .

Consideremos as retas concorrentes r e t e o plano $\beta$ determinado por elas.

Vamos mostrar que s está no plano $\beta$.

Temos $\beta \perp \alpha$ porque ..$r \subset \beta$ e $r \perp \alpha$.. .

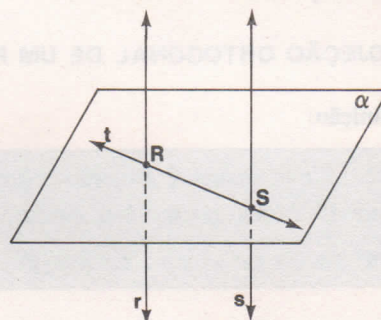
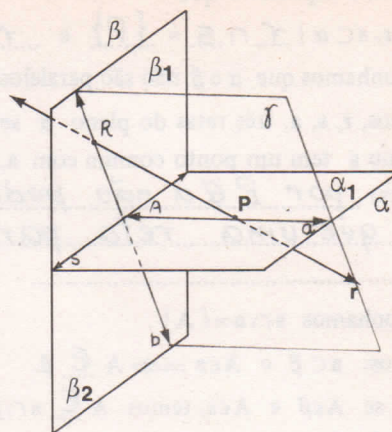
E, $s \perp \alpha$, por hipótese, e $S \in s \cap \beta$.

Logo, pelo exercício 1, concluímos que s ..$\subset$.. $\beta$.

Então, no plano $\beta$ temos:

$r \perp t$ porque ..$r \cap \alpha = \{R\}$, $R \in t$ e $r \perp \alpha$..

$s \perp t$ porque ..$s \cap \alpha = \{S\}$, $S \in t$ e $s \perp \alpha$..

e, portanto, $r \parallel s$.

## 58.6. TEOREMA FUNDAMENTAL DO PARALELISMO DE DOIS PLANOS

> *A condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes, paralelas ao outro.*

Em *símbolos:*

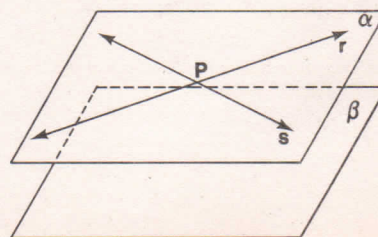
$$\alpha \parallel \beta \iff \begin{cases} \exists\, r, s \subset \alpha \mid r \cap s = \{P\} \\ \text{e} \\ r \parallel \beta, \quad s \parallel \beta \end{cases}$$

**Prova:**

**a) condição necessária**

A hipótese é que ..$\alpha \parallel \beta$.., isto é, $\alpha \cap \beta =$ ..$\emptyset$.. .

Então, se r e s são duas retas concorrentes, quaisquer de $\alpha$, temos:

$$r \cap s = \{P\} \text{ e } \begin{array}{l} r \cap \beta = \emptyset \implies r \parallel \beta \\ s \cap \beta = \emptyset \implies s \parallel \beta \end{array}$$

b) **condição suficiente**

Agora, a hipótese é que:

$\exists$ r, s $\subset \alpha$ | r $\cap$ s = {P} e r // $\beta$, s // $\beta$

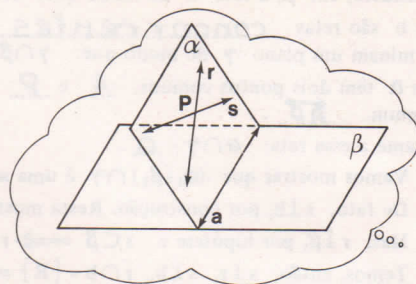
Suponhamos que $\alpha$ e $\beta$ não são paralelos. Então, $\exists$ a | $\alpha \cap \beta$ = a.

Temos, r, s, a, três retas do plano $\alpha$ sendo r e s concorrentes. Então, r ou s tem um ponto comum com a, porque (use o postulado de Euclides) por P ∉ a não pode existir mais que uma reta paralela à reta a .

Suponhamos s $\cap$ a = { A }.

Temos: a $\subset \beta$ e A $\in$ a $\Longrightarrow$ A $\in$ $\beta$.

Mas, se A $\in \beta$ e A $\in$ s, temos A $\in$ s $\cap \beta \Longrightarrow$ s $\not\parallel$ $\beta$ , o que contraria a hipótese.

Logo, não pode existir a reta a, isto é, $\alpha$ // $\beta$.

## 59. PROJEÇÕES

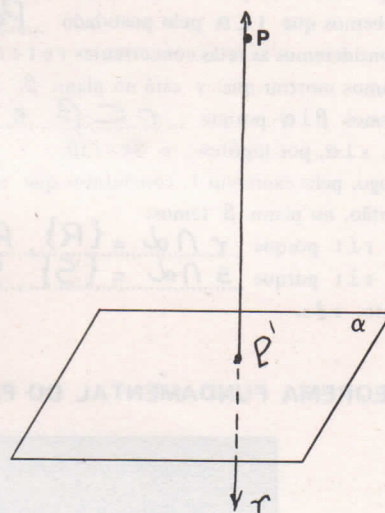
### 59.1. PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM PONTO SOBRE UM PLANO

**Definição:**

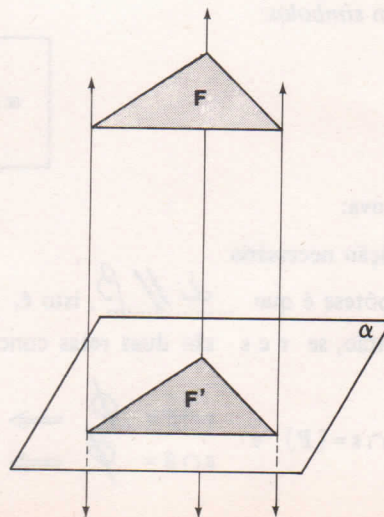
*Dados* P *e* α, *chama-se projeção ortogonal de* P *sobre* α *o ponto* P' *obtido do seguinte modo:*

$\overleftrightarrow{PP'}$ = r, r $\perp \alpha$ e r $\cap \alpha$ = { P' }.

*Complete a figura, com os elementos que aparecem na definição.*

*Notação:* $\text{proj}_\alpha P = P'$

### 59.2. PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA

**Definição**

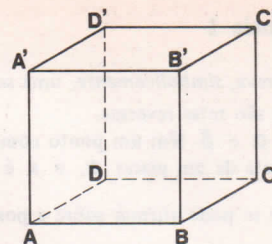
*Dada uma figura geométrica* F *e um plano* α, *chama-se projeção ortogonal de* F *sobre* α, *o conjunto* (F') *das projeções ortogonais de todos os pontos de* F *sobre* α.

## 59.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 57

1. Considere o cubo:

a) A projeção ortogonal do segmento A'C' sobre o *plano α, determinado* por A, B, C, é o segmento ....AC.

b) A projeção ortogonal do segmento AC' sobre α é ...$\overline{AC}$.

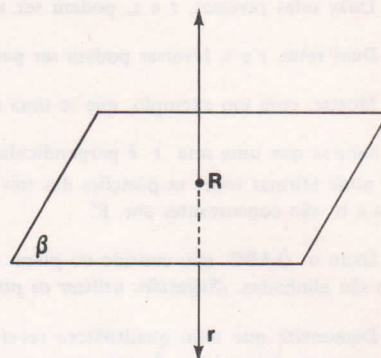
c) A projeção ortogonal do segmento AA' sobre α é ....A...

d) A projeção ortogonal do ponto A sobre α é ....o ponto A....

2. Seja $r \perp \beta$ e $r \cap \beta = \{R\}$.

Então, a projeção ortogonal de r sobre o plano β é o conjunto

.....unitário.....
(vazio; unitário; infinito)

Isto é,

$$\text{proj}_{\alpha}\, r = \{...R...\}$$

3. Seja $s \not\perp \gamma$. Prove que $\text{proj}_{\gamma}\, s$ *é uma reta.*

**Prova:**

Considere dois pontos, A e B, de s e suas projeções ortogonais, A' e B'.

$\text{proj}_{\gamma}\, A = A'$ e ....$\text{proj}_{\gamma} B$....= B'

Seja $s' = A'B'$. Sabemos que s' ...⊂... γ pelo postulado ...P9... .

*Complete a figura com tais elementos.*

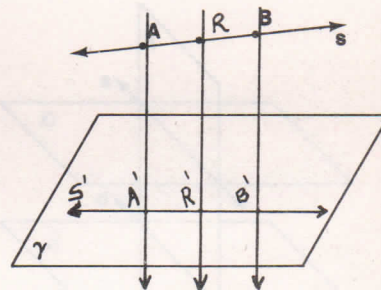
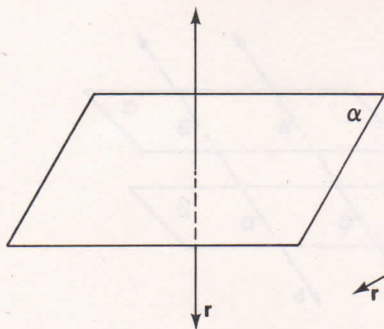
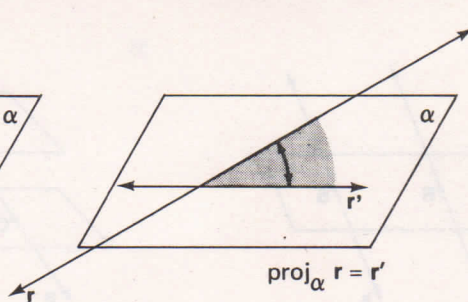
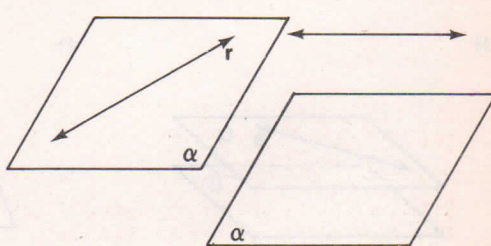
Seja, agora, um ponto R qualquer de s e provemos que $\text{proj}_{\gamma}\, R$ é um ponto de s'.

Seja $\text{proj}_{\gamma}\, R = R'$. Então $RR' \perp \gamma$.

Temos AA' // BB', pelo exercício 2 do parágrafo 58.5., e seja α o plano que contém AA' e BB'.

Temos α ...⊥... γ porque .....$\overleftrightarrow{AA'} \subset \alpha$ e $\overleftrightarrow{AA'} \perp \gamma$..... .

Por outro lado, $R \in \alpha \cap RR'$. Então, temos: RR' | RR' ...⊥... γ, α | α ⊥ γ e $R \in \alpha \cap RR'$ e, pelo exercício 1 do parágrafo 58.5., concluímos que: RR' ...⊂... α.

Como $\alpha \cap \gamma$ = ...S'... , concluímos que $RR' \cap \gamma \subset$ ...S'... , isto é, R' ...∈... s'.

## 59.4. INCLINAÇÃO DE UMA RETA EM RELAÇÃO A UM PLANO

a) b) c)

Se $r \perp \alpha$, dizemos que a reta r tem *inclinação* de **90º** em relação a α.

Se $r \not\perp \alpha$, $r \not\subset \alpha$ e $r \not\parallel \alpha$, dizemos que a *inclinação* de r em relação a α é a *medida do ângulo agudo formado por* r *e sua projeção ortogonal* sobre α.

Se $r \subset \alpha$ ou se $r \parallel \alpha$, dizemos que r tem *inclinação nula* em relação ao plano α.

## 60. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. Escreva, *simbolicamente*, uma sentença equivalente a:

a) a e b não são retas reversas.
b) os planos $\alpha$ e $\beta$ têm um ponto comum.
c) r é uma reta de um plano $\alpha$, e s é uma reta que intercepta $\alpha$ num ponto de r.

2. Que se pode afirmar sobre a posição de a relativa a $\alpha$, nos seguintes casos?

a) $a \cap \alpha = \phi$ b) $a \cap \alpha = a$ c) $\alpha \cap \beta = a$

3. Duas retas reversas, r e s, podem ser ambas perpendiculares a uma mesma reta a? *(Sugestão: olhar as arestas de um cubo).*

4. Duas retas, r e s, reversas podem ser paralelas à mesma reta? Justifique. E ao mesmo plano? Justifique.

5. Mostre, com um exemplo, que se uma reta r é paralela a um plano $\alpha$, ela não é paralela a todas as retas do plano $\alpha$.

6. Sabe-se que uma reta r é perpendicular a duas retas distintas, a e b.

a) que se pode afirmar sobre as posições das três retas, se $a \parallel b$?
b) e, se a e b são concorrentes em P?

7. Dado o $\triangle ABC$ não contido no plano $\alpha$, sabe-se que as retas AB, BC e AC furam $\alpha$ em 3 pontos M, N e S. Prove que esses pontos são alinhados. *(Sugestão: utilizar os postulados: $P_8$, $P_9$ e $P_{12}$).*

8. Demonstre que num quadrilátero reverso (isto é, um quadrilátero tal que os 4 vértices não são coplanares), os pontos médios dos lados opostos determinam 2 retas concorrentes. *(Sugestão: demonstrar que são retas-suporte das diagonais de um paralelogramo).*

### Sequência 2

1)

Prove que se dois planos paralelos, $\alpha$ e $\beta$, são interceptados por um terceiro plano $\gamma$, então, se $a = \alpha \cap \gamma$ e $b = \beta \cap \gamma$, temos $a \parallel b$. *(Sugestão: utilizar definição de retas paralelas e de planos paralelos).*

2)

Prove que duas secções normais de um diedro são ângulos congruentes. *(Sugestão: utilizar o exercício anterior e o caso* LLL *de congruência de triângulos).*

3)

Prove que se dois planos, $\alpha$ e $\beta$, são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

4)

Prove que se duas retas, r e s, são paralelas, todo plano $\alpha$ que intercepta uma delas, intercepta também a outra reta. *(Sugestão: mostre que r e s determinam um plano $\beta$ que tem uma reta comum com $\alpha$).*

5)

Prove que, se dois planos paralelos, $\alpha$ e $\beta$, interceptam duas retas paralelas, a e b, os segmentos determinados sobre as retas são congruentes.

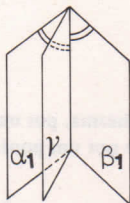
6. Prove que, no espaço, se $r \parallel s$ e $s \parallel t$ então $r$ e $t$ são coplanares. *(Sugestão: suponha $r$ e $t$ reversas. Considere um plano $\gamma$ que contém $r$ e intercepta $t$ e utilize o exercício 4 desta sequência).*

7. Prove que, no espaço, se $r \parallel s$ e $s \parallel t$ então $r \parallel t$. *(Sugestão: use o exercício anterior e o postulado de Euclides).*

## Sequência 3

1. Dado um diedro $\alpha_1 r \beta_1$, traça-se por um ponto do mesmo, não pertencente às faces, uma perpendicular a cada face do diedro. Se o ângulo dessas duas retas é de $120^o$, qual é a medida do diedro? Justifique.

2. "Chama-se plano bissetor de um diedro o plano que contém a aresta e o divide em dois diedros congruentes".

Prove que qualquer ponto do plano bissetor é equidistante das faces do diedro.

3. Determine a relação existente entre a secção normal de um diedro e o ângulo formado por duas retas concorrentes, respectivamente perpendiculares às faces do diedro.

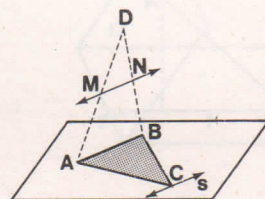
Justificar.

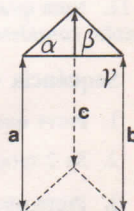
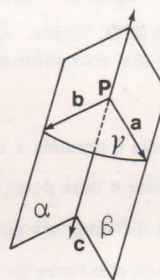
## Sequência 4

1. Dados 3 pontos, P, B e S, sendo $P \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $S \notin \alpha$, demonstre que, se M é o ponto médio de $\overline{PS}$ e N é o ponto médio de $\overline{BS}$, então $\overleftrightarrow{MN}$ é paralela a $\alpha$.

2. Prove que, se dois planos concorrentes contêm, respectivamente, duas retas paralelas entre si, cada uma delas é paralela à intersecção dos dois planos.

3. Prove que, se dois planos, concorrentes entre si, são paralelos a uma mesma reta, então sua intersecção é paralela a essa reta. *(Sugestão: utilizar o exercício 7 da sequência 4 e o exercício anterior).*

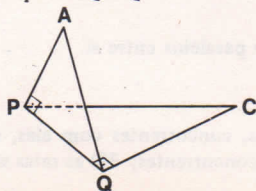
4. Dados um $\triangle ABC$ e um ponto D, fora do plano do triângulo, toma-se: M e N, pontos médios de $\overline{DA}$ e $\overline{DB}$, respectivamente. Prove que $\overleftrightarrow{MN}$ e a intersecção s, dos planos MNC e ABC, são paralelas.

5. Se três planos, $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, são tais que se interceptam, 2 a 2, em 3 retas distintas, a, b e c, demonstre que essas 3 retas são concorrentes em um único ponto, ou são paralelas entre si.

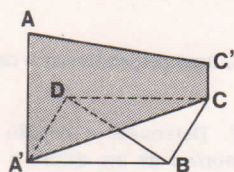
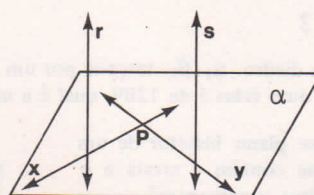
$$\begin{bmatrix} \alpha \cap \beta = c \\ \alpha \cap \gamma = b \\ \beta \cap \gamma = a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a \cap b \cap c = \{P\} \\ \text{ou} \\ a \parallel b \parallel c \end{bmatrix}$$

6. Prove que se uma reta r e um plano $\alpha$ têm um ponto comum P e são ambos paralelos a uma mesma reta s, então a reta r está contida no plano $\alpha$. *(Sugestão: considere o plano $\beta$ determinado por s e P e mostre que $\alpha \cap \beta$ deve ser r).*

## Sequência 5

1. Prove que a condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que ela seja ortogonal a duas retas concorrentes do plano. *(Sugestão: utilizar a definição de retas ortogonais e o teorema fundamental).*

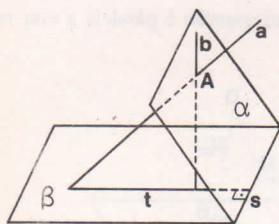
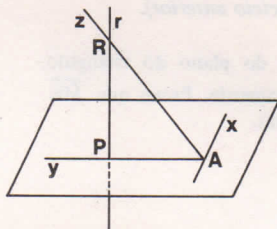
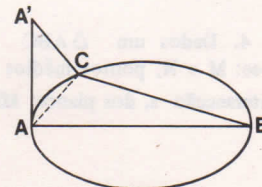
2. Dados $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$, $\overline{AP} \perp \overline{PC}$ e $\overline{PQ} \perp \overline{QC}$

Demonstrar que $\overline{AQ} \perp \overline{QC}$.

3. Prove que, se uma reta e um plano são perpendiculares ao mesmo plano, eles são paralelos ou a reta está contida no plano.

4. Sabe-se que ABCD é um quadrado, AA' e CC' são perpendiculares ao plano do quadrado. Demonstre que as retas A'C' e BD' são ortogonais.

5. Dados $x \subset \alpha$, $y \subset \alpha$ e $x \cap y = \{P\}$
$r \perp x$ e $r \not\subset \alpha$
$s \perp y$ e $s \not\subset \alpha$
Demonstre que, se $r \parallel s$, então, $r \perp \alpha$ e $s \perp \alpha$.

6. Num plano são dados uma circunferência e uma tangente t à mesma, por um ponto M. Traça-se, pelo centro O da circunferência, a perpendicular r ao seu plano, e um plano $\beta$ determinado por t e por um ponto $R \in r$. Demonstre que este plano é perpendicular ao plano OMR.

7. Prove que quaisquer 3 retas perpendiculares a uma reta r, por um ponto $P \in r$, são coplanares.

8. Dados 2 planos concorrentes $\alpha$ e $\beta$, tais que $\alpha \cap \beta = s$, traçam-se, por um ponto A de $\alpha$, as retas $a \perp \alpha$ e $b \perp \beta$.

Demonstre que as retas s e t, intersecção de $\beta$ com o plano ab, são perpendiculares entre si.

9. Se a reta r é perpendicular ao plano $\alpha$, em P e, se y está contida em $\alpha$, passa por P e é perpendicular a uma reta x de $\alpha$, então, demonstre que toda reta z, determinada por um ponto R de r e pelo ponto A, intersecção de x e y, é perpendicular à reta x.

10. Dada uma circunferência de diâmetro AB, levanta-se por A o segmento AA', perpendicular ao plano da circunferência, e une-se A' a um ponto C qualquer da circunferência. Demonstre que as retas BC e A'C são perpendiculares.

11. Prove que todos os pontos do espaço equidistantes de 2 pontos A e B, dados, pertencem a um plano perpendicular à reta AB, passando pelo ponto médio do segmento AB. (Este plano é chamado plano mediador do segmento AB.)

12. Num quadrilátero ABCD, temos: $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{BD}$. Demonstre que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais. *(Sugestão: considere as alturas dos triângulos isósceles* ABC e BOC, *pelos vértices* A e D, *respectivamente).*

## Sequência 6

1. Prove que, se uma reta é paralela a um plano $\alpha$ e perpendicular a um plano $\beta$, então $\alpha \perp \beta$.

2. Se 2 retas são paralelas e uma delas é perpendicular a um plano, então, a outra também é perpendicular a este plano.

3. Prove que se 2 retas distintas são perpendiculares ao mesmo plano, então, elas são paralelas entre si.

4. Prove que, se 2 planos concorrentes são perpendiculares ao mesmo plano, a sua intersecção é perpendicular ao plano.

5. "Diz-se que 2 diedros são adjacentes se, e somente se, eles têm uma face comum e as outras faces são semi-planos opostos". Prove que os planos bissetores de 2 diedros adjacentes são perpendiculares.

6. Prove que por um ponto que não pertence a um plano, existe uma única perpendicular ao plano.

## Sequência 7

1. Dados 4 pontos, A, B, C e D, não-coplanares, prove que os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ determinam um plano paralelo ao plano BCD.

2. Prove que, se $\alpha$ e $\beta$ são paralelos, qualquer reta que fura um deles, fura também o outro.

3. Prove que, se $\alpha$ e $\beta$ são paralelos, qualquer plano concorrente com um deles é concorrente com o outro.

4. Demonstre que, se $\alpha$ e $\beta$ são planos paralelos e $a \perp \alpha$, então, $a \perp \beta$.

5. Demonstre que, se 2 planos são perpendiculares a uma mesma reta, então, eles são paralelos entre si.

6. Prove que, se $r \not\subset \alpha$ e $r \perp a$ e $\alpha \perp a$, então $r \parallel \alpha$.

7. Teorema de Tales – "Um feixe de planos paralelos determinam sobre duas retas, concorrentes com eles, segmentos proporcionais." (Faça a demonstração em 3 etapas: 1ª) as duas retas são paralelas; 2ª) as retas são concorrentes; 3ª) as retas são reversas – para este caso, considere, por um ponto de uma delas, uma paralela à outra.)

**Sequência 8**

1. Um diedro mede 120°. Qual a inclinação de uma reta perpendicular ao plano bissetor do diedro, em relação às faces do mesmo?

2. Uma reta, perpendicular a uma das faces de um diedro, tem inclinação de 36° em relação ao bissetor do diedro. Calcule a medida do diedro.

3. Demonstre o seguinte teorema: Se por um ponto P, não pertencente ao plano $\alpha$, traçarmos a perpendicular a $\alpha$ e outras retas quaisquer, que chamaremos oblíquas, tem-se:

a) a medida do segmento determinado pelo ponto P e pelo plano $\alpha$ sobre a perpendicular é menor que as medidas dos segmentos determinados sobre as oblíquas.

b) as medidas dos segmentos determinados sobre 2 oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular, são iguais.

c) considerando 2 oblíquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular, a medida do segmento determinado sobre a mais afastada é maior.

d) considerando 2 oblíquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular, a mais afastada tem menor inclinação.

# SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

## 61. PRISMAS E CILINDROS

### 61.1. DEFINIÇÕES

> *Dados um par de planos paralelos,* $\alpha_1 /\!/ \alpha_2$, *um conjunto* $B_1 \subset \alpha_1$, *e uma reta* r *tal que* $r \cap \alpha_1 = \{P_1\}$ *e* $P_1 \notin B_1$, *então o conjunto*
>
> $$K = \{\overline{PP'} \mid P \in B_1,\ P' \in \alpha_2 \ \text{e}\ \overleftrightarrow{PP'} /\!/ r\}$$
>
> *é chamado um* **cilindro** *de* **base** $B_1$ *e* **diretriz** r.

Na figura, desenhamos um dos segmentos $PP' \in K$. *Desenhe outros desses segmentos.*

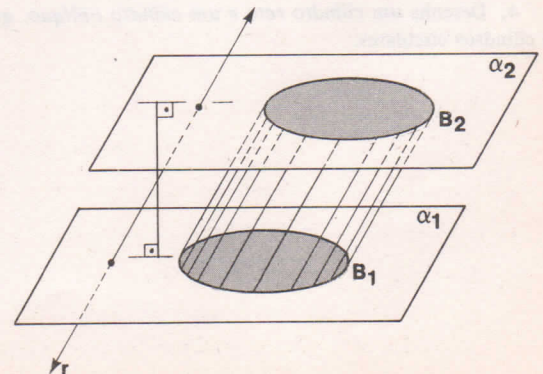
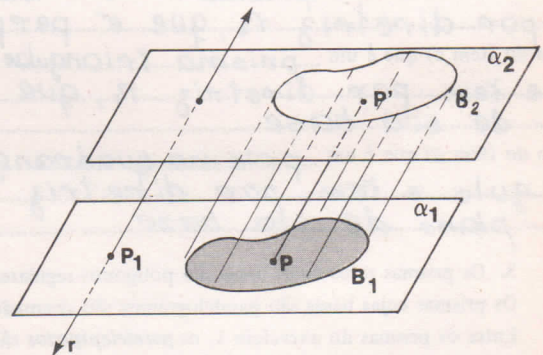
Os segmentos $PP' \in K$ são chamados **geratrizes** do cilindro K.

A figura $B_2$ determinada por todos os pontos P' também é chamada **base** do cilindro.

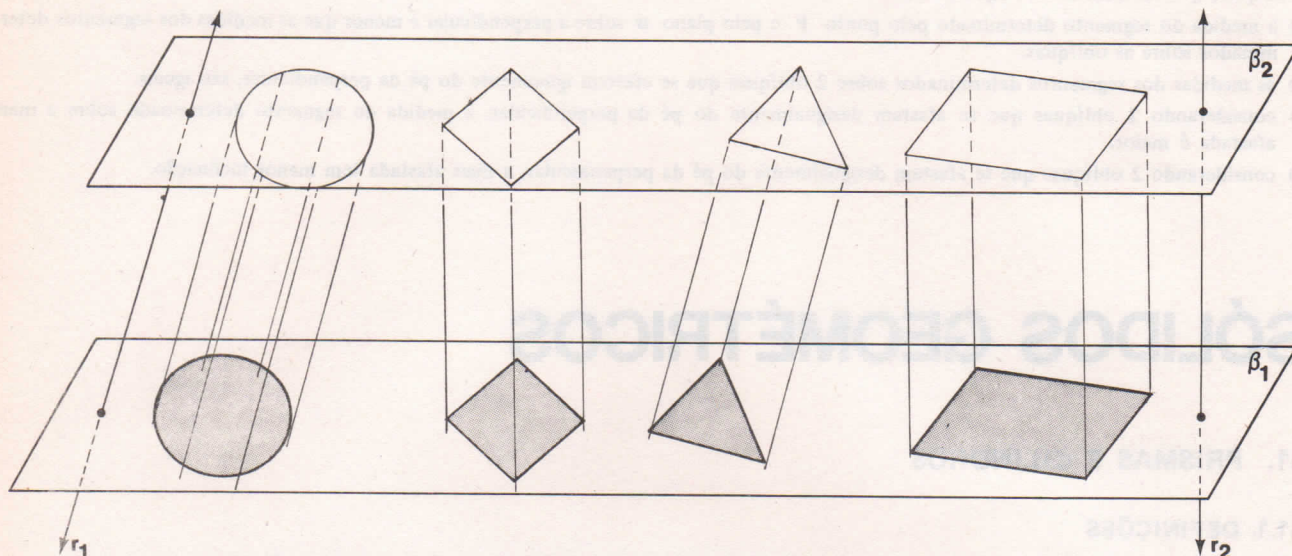
Temos $B_2$ .......... $\alpha_2$.
($\subset$ ; $\not\subset$)

*Desenhe* $B_2$ *no plano* $\alpha_2$.

A **distância** entre $\alpha_1$ e $\alpha_2$ é a medida do segmento determinado pelos planos, sobre uma perpendicular comum. Esta distância é chamada **altura** do cilindro.

*Represente na figura um segmento cuja medida é a altura do cilindro.*

## 61.2. FAÇA VOCÊ — TAREFA 58

1. Considere os planos $\beta_1$ e $\beta_2$, abaixo, e as retas $r_1$ e $r_2$ e, desenhe:

a) um cilindro cuja *base* é um *círculo* e cuja diretriz é $r_1$.
b) um cilindro cuja *base* é um *quadrado* e cuja diretriz é $r_2$.
c) um cilindro cuja *base* é um *triângulo* e cuja diretriz é $r_1$.
d) um cilindro cuja *base* é um *retângulo* e cuja diretriz é $r_2$.

2. Um cilindro cuja base é um círculo é chamado *cilindro circular.*

Um cilindro cuja base é um polígono é chamado *prisma.*

O prisma será chamado *triangular, quadrangular, pentagonal,* etc., de acordo com o polígono da base (triângulo, quadrilátero, pentágono, etc.).

Um cilindro cuja diretriz é perpendicular ao plano da base é dito *cilindro reto* e, em caso contrário, *oblíquo.* O cilindro reto é também chamado de *cilindro de revolução* ou *de rotação.*

Entre os cilindro do exercício 1, temos:

- o do ítem a) que é um *cilindro circular* e *oblíquo* porque sua base é um círculo e tem por diretriz $r_1$ que não é ⊥ ao plano de sua base.
- o do ítem b) que é um prisma quadrangular e reto porque sua base é um quadrado e tem por diretriz $r_2$ que é perpendicular ao plano de sua base.
- o do ítem c) que é um prisma triangular oblíquo porque sua base é um triângulo e tem por diretriz $r_1$ que não é perpendicular ao plano de sua base.
- o do ítem d) que é um prisma quadrangular e reto porque sua base é um retângulo e tem por diretriz $r_2$ que é perpendicular ao plano de sua base.

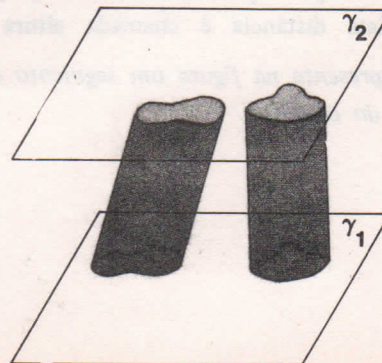
3. Os prismas retos cujas bases são polígonos regulares são chamados *prismas regulares.*

Os prismas cujas bases são paralelogramos são chamados *paralelepípedos.*

Entre os prismas do exercício 1, os *paralelepípedos* são os dos ítens b e d.

O *prisma regular* é o do ítem b.

Polígonos regulares possuem lados e ângulos congruentes.

4. Desenhe *um cilindro reto e um cilindro oblíquo,* que não sejam prismas nem cilindros circulares.

5. Considere o *prisma* ao lado e enumere os polígonos desenhados:

ABCDE e A'B'C'D'E' (bases)

ABB'A', BCC'B', CDD'C', DEE'D', EAA'E'

Todos esses polígonos são chamados faces do prisma.

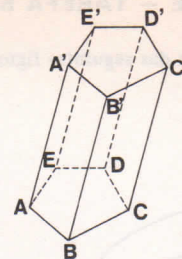
Os polígonos que não são bases são as faces laterais.

As faces laterais do prisma da figura são os polígonos ABB'A, BCC'B', CDD'C', DEE'D', EAA'E', cujo número é igual ao número de lados dos polígonos das bases

Os vértices dos polígonos das faces são chamados vértices do prisma.

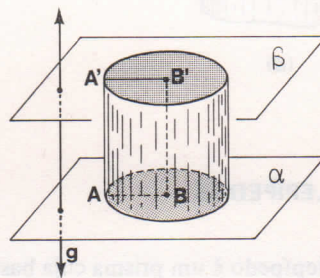
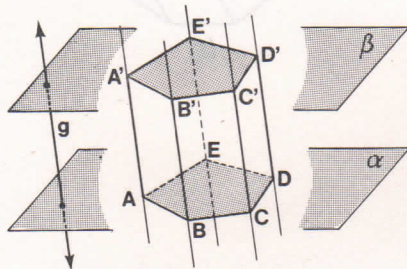
O prisma da figura tem 10 vértices, a saber: A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'.

Os lados dos polígonos das faces são as arestas do prisma.

As arestas do prisma dado são os segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{AE}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{A'E'}$, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$

6. As faces laterais de um prisma são sempre *paralelogramos* porque as arestas opostas estão contidas em retas paralelas. (ver exercício 1. do parágrafo 61.2.)

7. As faces laterais de um prisma reto são sempre retângulos porque as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases (exercício 1. do parágrafo 61.2.)

8. As bases de um prisma são polígonos congruentes porque são determinados em planos paralelos por retas paralelas, que os interceptam.

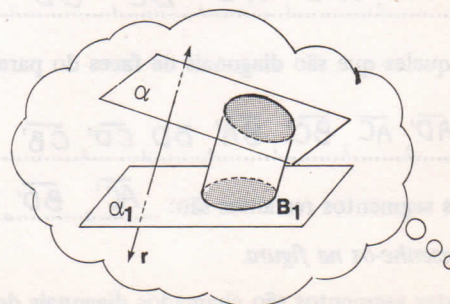
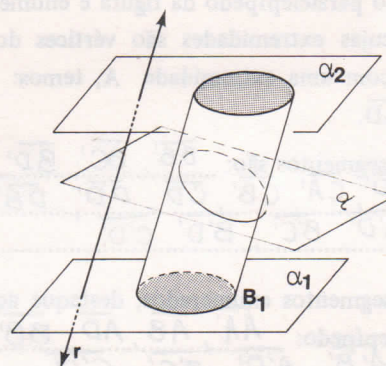
9. As duas bases de um cilindro circular reto são círculos congruentes porque são determinados em planos paralelos por retas perpendiculares, que os interceptam.

## 61.3. TRONCOS DE CILINDRO

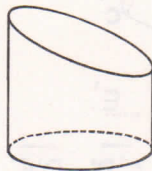
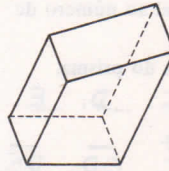
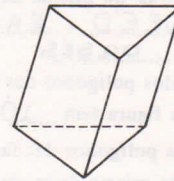
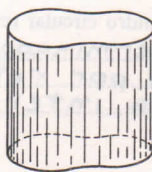
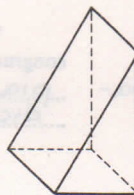
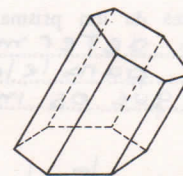
Considere um cilindro K de base $B_1$ e diretriz r:

$K = \{ \overline{PP'} \mid P \in B_1,\ P' \in \alpha_2 \text{ e } \overline{PP'} \parallel ..... \}$

Considere, agora, um plano $\alpha$, $\alpha \nparallel \alpha_1$ tal que se $\overline{PP'} \in K$ então $\overline{PP'} \cap \alpha \neq \phi$. Isto é, o plano $\alpha$ intercepta todas as geratrizes do cilindro.

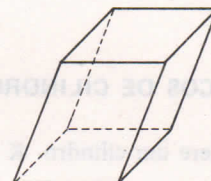
*Desenhe o plano* $\alpha$.

**Cada uma das partes do cilindro, determinadas pelo plano $\alpha$, é um tronco de cilindro.**

## 61.4. FAÇA VOCÊ – TAREFA 59

Verifique quais das seguintes figuras são cilindros e quais são troncos de cilindros.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

## 61.5. PARALELEPÍPEDOS

Um paralelepípedo é um prisma cuja base é um paralelogramo.

Logo, todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos.

a) Considere o paralelepípedo da figura e enumere todos os segmentos distintos cujas extremidades são vértices do paralelepípedo. Por exemplo, com uma extremidade A, temos: $\overline{AA'}$, $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$, $\overline{AD'}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

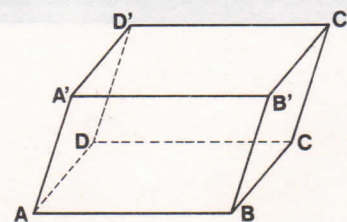
Os outros segmentos são: $\overline{BB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{BA'}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CC'}$, $\overline{CD'}$, $\overline{CA'}$, $\overline{CB'}$, $\overline{CD}$, $\overline{DD'}$, $\overline{DB'}$, $\overline{DC'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{DA'}$, $\overline{A'C'}$, $\overline{A'D'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{B'D'}$, $\overline{C'D'}$.

Entre os segmentos enumerados, destaque aqueles que são arestas do paralelepípedo: $\overline{AA'}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BB'}$, $\overline{BC}$, $\overline{CC'}$, $\overline{CD}$, $\overline{DD'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{A'D'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$.

Aqueles que são diagonais de faces do paralelepípedo são: $\overline{AB'}$, $\overline{AD'}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC'}$, $\overline{BA'}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD'}$, $\overline{CB'}$, $\overline{DA'}$, $\overline{DC'}$, $\overline{A'C'}$, $\overline{B'D'}$.

Os segmentos restantes são: $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$, $\overline{DB'}$.

*Desenhe-os na figura.*

Estes segmentos são chamados **diagonais do paralelepípedo**.

*Elabore uma definição para diagonal de um paralelepípedo:*

> Diagonal de um paralelepípedo é segmento determinado por vértices não pertencentes à mesma base.

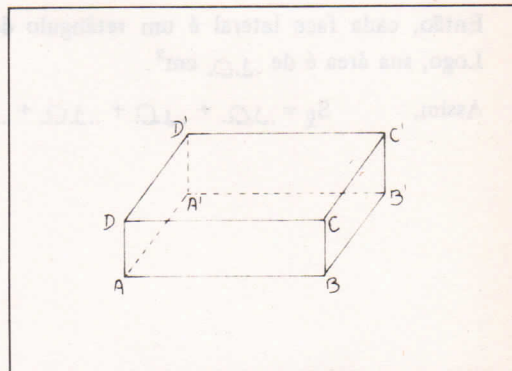
b) Um paralelepípedo é chamado **paralelepípedo retângulo** se ele é um prisma reto e sua base é um retângulo.

*Desenhe* um paralelepípedo retângulo cujas bases são **ABCD** e **A'B'C'D'**.

As arestas do seu paralelepípedo podem ser agrupadas em três conjuntos de segmentos congruentes:

$\{\overline{AB}, \overline{DC}, \overline{A'B'}, \overline{D'C'}\}$

$\{\overline{BC}, \overline{B'C'}, \overline{A'D'}, \overline{AD}\}$

$\{\overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}, \overline{AA'}\}$

Chamando $a$ a medida dos segmentos do primeiro conjunto, $b$ a medida dos segmentos do segundo e $c$ a medida dos segmentos do terceiro, temos três números reais chamados **dimensões do paralelepípedo**.

c) Considerando:

$\overline{BD}$: diagonal da face **ABCD** do paralelepípedo.

$\overline{BD'}$: diagonal do paralelepípedo.

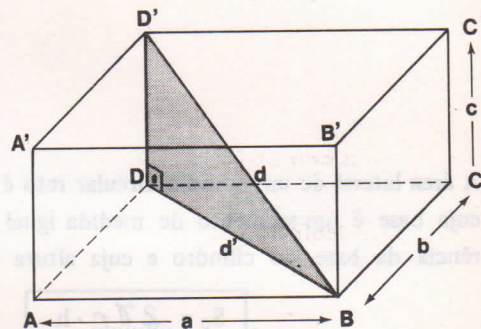
$\triangle$**BD'D** é retângulo porque $\overline{D'D} \perp \overline{DB}$ (aresta do paralelepípedo retângulo é perpendicular ao plano da base).

Aplicando o teorema de Pitágoras a esse triângulo, temos:

$$d^2 = d'^2 + c^2$$

onde: d: medida da diagonal do paralelepípedo

d': medida da diagonal da face.

..... : é uma das dimensões do paralelepípedo.

Agora, **d'** pode ser escrito em função das outras dimensões do paralelepípedo, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo **ADB**:

$$d'^2 = a^2 + b^2$$

Observando as duas igualdades, temos:

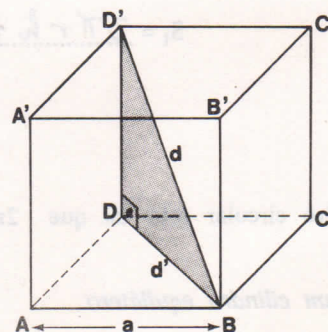
$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

d) Um cubo é um paralelepípedo retângulo cujas faces são quadrados.

As dimensões do cubo são iguais e a fórmula da diagonal aplicada ao cubo fica:

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2$$

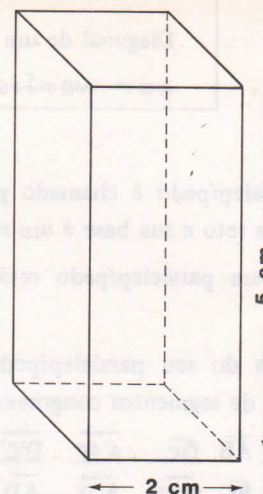
ou

$$\boxed{d^2 = 3a^2}$$

## 61.6. ÁREAS DOS CILINDROS

a) A **área lateral** de um **prisma** é a *soma das áreas de suas faces laterais* que indicaremos por $S_\ell$.

Considere um *prisma reto* cuja base é um quadrado de 2 cm de lado e cuja altura é de 5 cm.

Então, cada face lateral é um retângulo de ..2.. cm por ..5.. cm. Logo, sua área é de ..10.. $cm^2$.

Assim, $S_\ell$ = ..10.. + ..10.. + ..10.. + ..10.. = ..40 cm²..

b) A **área total** de um **prisma** é a *soma das áreas de todas as suas faces,* que indicaremos por $S_t$. Se indicarmos por $S_b$ a área de cada base do prisma,

$S_t$ = ..$S_\ell$.. + 2 ..$S_b$..

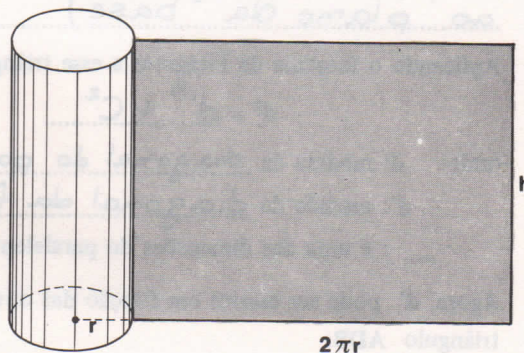
Para o mesmo prisma do ítem a):

$S_t$ = 40 + ..2.4..

$S_t$ = ..48 cm²..

$S_b = 4\ cm^2$

c) A **área lateral** de um **cilindro circular reto** é a área de um retângulo cuja base é um segmento de medida igual à medida da circunferência da base do cilindro e cuja altura é a altura do cilindro.

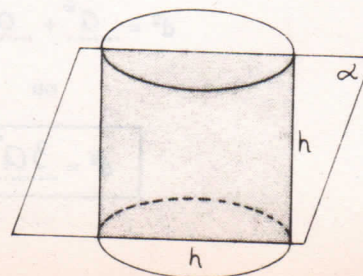
$S_\ell$ = ..$2\pi r$.. · h

d) A **área total** do **cilindro circular reto** é a soma da área lateral e das áreas das bases do cilindro.

$S_t$ = ..$S_\ell$.. + 2 ..$S_b$..

então: $S_t$ = ..$2\pi r h + 2\pi r^2$.. ou $S_t = 2\pi r($ ..$h + r$.. $)$

e) Um cilindro circular reto tal que $2r = h$ é chamado **cilindro equilátero.**

*Desenhe um cilindro equilátero.*

*Desenhe um plano* $\alpha$ tal que a intersecção do cilindro com o plano seja um quadrado.

A medida do lado de tal quadrado é ...$h$... .

Chamando $\overline{CC'}$ a geratriz do cilindro tal que **C** é o centro do círculo da base, temos $\overline{CC'}$ ..$\subset$.. α.

**A área total** do cilindro equilátero pode ser escrita em função de **r**:

$$S_t = 2\pi r\,(2r + r) = \ldots 6\pi r^2 \ldots$$

ou, em função de **h**:

$$S_t = 2\pi\,\frac{h}{2}\,(h + \frac{h}{2}) = \ldots\frac{3\pi h^2}{2}\ldots$$

f) Calculemos a **área total** de um *prisma regular hexagonal reto* de altura $\sqrt{3}$ cm e aresta da base 2 cm.

Sabemos que: $S_t = \ldots S_\ell \ldots + \ldots 2S_b \ldots$

portanto, temos que calcular $S_\ell$ e $S_b$.

A *área lateral* é a soma das áreas de ..6.. retângulos congruentes de dimensões: ..2.. cm por ..$\sqrt{3}$.. cm. Logo:

$$S_\ell = \ldots 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \ldots$$

A *área da base* é a área de um hexágono regular.

Como o hexágono regular é composto de ..6.. triângulos equiláteros, temos:

$$S_b = 6 \cdot (\text{área do } \triangle \mathbf{ABO})$$

e área do $\triangle \mathbf{ABO} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \ldots\sqrt{3}\ldots\ \text{cm}^2$

$$S_b = \ldots 6\sqrt{3} \ldots\ \text{cm}^2.$$

Assim, temos finalmente:

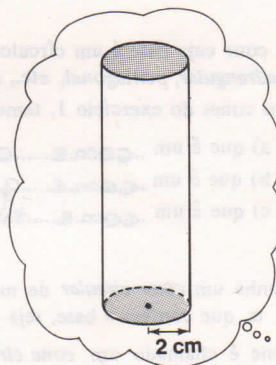
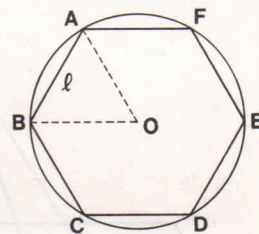
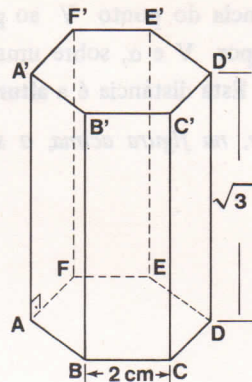
$$S_t = \ldots 12\sqrt{3} \ldots + \ldots 12\sqrt{3} \ldots = \ldots 24\sqrt{3} \ldots\ \text{cm}^2$$

g) Calcule a **área total** de um *cilindro circular reto* cuja altura é o triplo do comprimento da circunferência da base, que tem 2 cm de raio.

O comprimento da circunferência é ..$2\pi r = 4\pi$ cm.. logo, a altura é ..$12\pi$ cm.. .

Assim, temos: $S_\ell = \ldots 2\pi r h = 48\pi^2\ \text{cm}^2 \ldots$

$$S_b = \ldots \pi r^2 = 4\pi\ \text{cm} \ldots$$

e, portanto, $S_t = \ldots 48\pi^2 + 8\pi = 8\pi(6\pi + 1)\ \text{cm}^2 \ldots$

## 62. PIRÂMIDES E CONES

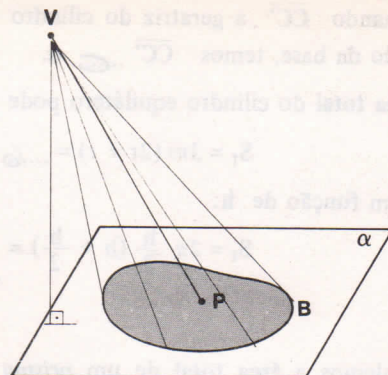
### 62.1. DEFINIÇÕES

> *Dados um plano* α, *um ponto* $V \notin \alpha$ *e um conjunto* $B \subset \alpha$, *o conjunto*
>
> $$K = \{\overline{PV} \mid P \in B\}$$
>
> *é chamado um* **cone** *de* **base B** *e* **vértice V**.

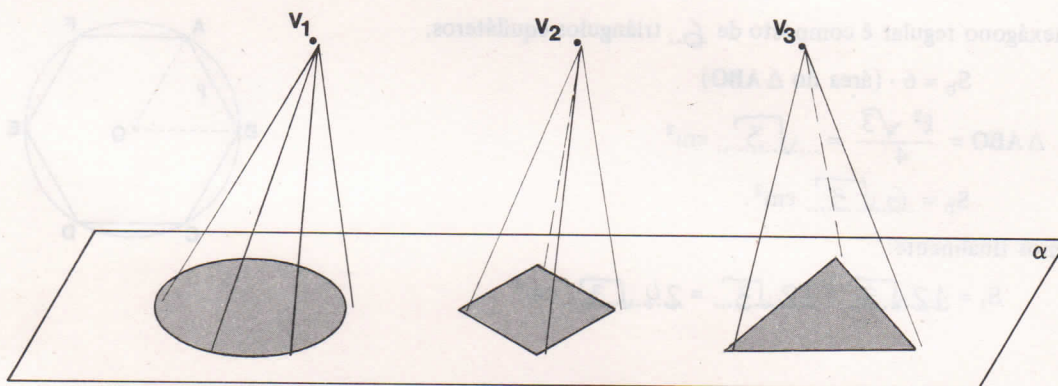
Na figura, desenhamos apenas um dos segmentos $\overline{PV} \in K$. *Desenhe outros desses segmentos.*

Os segmentos $\overline{PV} \in K$ são chamados **geratrizes** do cone K.

A **distância** do ponto V ao plano $\alpha$ é a medida do segmento determinado por V e $\alpha$, sobre uma perpendicular ao plano $\alpha$ que passa por V. Esta distância é a **altura** do cone.

*Desenhe, na figura acima, o segmento cuja medida é a altura do cone.*

## 62.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 60

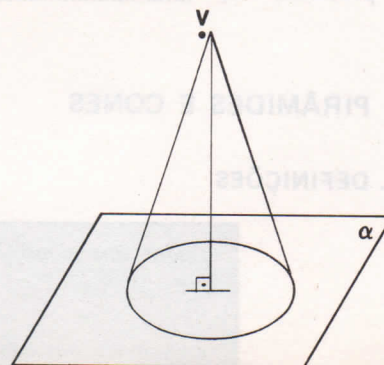
1. Considere o plano $\alpha$ e os pontos $V_1$, $V_2$, $V_3$, abaixo, e desenhe:

a) um cone cuja *base* é um *círculo* e cujo vértice é o ponto $V_1$.
b) um cone cuja *base* é um *quadrado* e cujo vértice é $V_2$.
c) um cone cuja *base* é um *triângulo* e cujo vértice é $V_3$.

2. Um cone cuja base é um círculo é um *cone circular*. Um cone cuja base é um polígono é chamado ***pirâmide***. Uma pirâmide será *triangular, quadrangular, pentagonal,* etc., de acordo com o polígono da base (triângulo, quadrilátero, pentágono, etc.).

Entre os cones do exercício 1, temos:

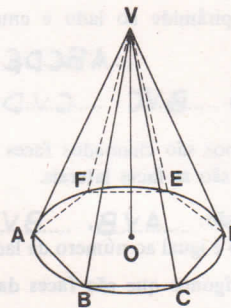
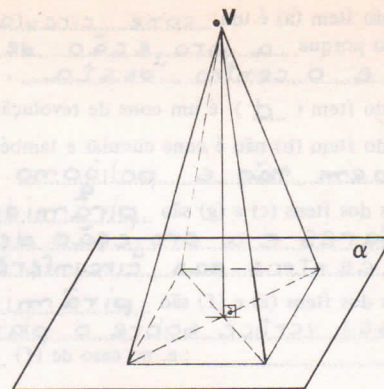
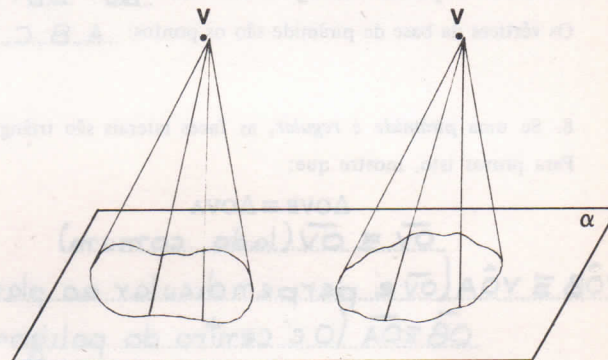
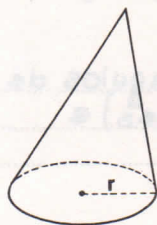
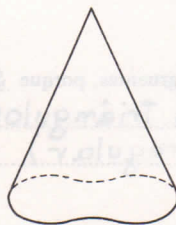
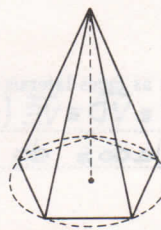
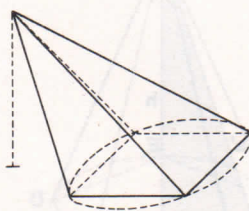
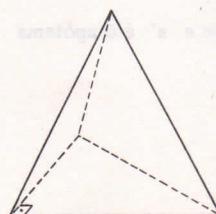
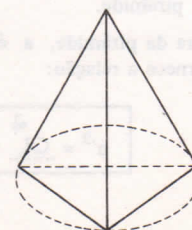
- o do ítem a) que é um cone circular porque sua base é um círculo.
- o do ítem b) que é um cone quadrangular porque sua base é um quadrado.
- o do ítem c) que é um cone triangular porque sua base é um triângulo.

3. Desenhe um *cone circular* de modo que a projeção de seu vértice V sobre o plano $\alpha$, que contém a base, seja o centro do círculo da base.

Este cone é chamado um *cone circular reto* ou um *cone de revolução* ou *rotação.*

4. Desenhe uma pirâmide cuja base seja um quadrado e tal que a projeção de seu vértice V sobre o plano $\alpha$, que contém a base, seja o ponto de encontro das diagonais do quadrado.

Esta *pirâmide* é chamado *pirâmide quadrangular regular.*

De modo geral podemos definir:

Uma pirâmide é regular se o polígono da base é regular e a projeção do vértice sobre o plano da base é o centro da circunferência circunscrita à base.

5. Desenhe cones que não sejam pirâmides nem cones circulares.

6. Considere os seguintes cones:

- O cone do ítem (a) é um cone circular porque sua base é um círculo, mas não é um cone de revolução porque a projeção de seu vértice sobre o plano de sua base não é o centro desta.
- O cone do ítem (d) é um cone de revolução.
- O cone do ítem (b) não é cone circular e também não é pirâmide porque sua base não é círculo e também não é polígono.
- Os cones dos ítens (c) e (g) são pirâmides regulares porque suas bases são polígonos regulares e a projeção de seus vértices sobre o plano de suas bases são centros das circunferências circunscritas a estas bases.
- Os cones dos ítens (e) e (f) são pirâmides mas não são regulares porque: no caso de (e) a projeção de seu vértice sobre o plano de sua base não é o centro desta base; e, no caso de (f) a sua base não é um polígono regular.

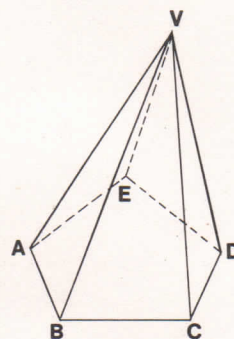
7. Considere a pirâmide ao lado e enumere os polígonos desenhados:

ABCDE (base)

AVB, BVC, CVD, DVE, EVA

Todos os polígonos são chamados faces da pirâmide. As faces que têm o vértice V da pirâmide são as faces laterais.

As faces laterais são: AVB, BVC, CVD, DVE, EVA cujo número é igual ao número de lados do polígono da base.

Os lados dos polígonos que são faces da pirâmide são chamados arestas da pirâmide.

As arestas da pirâmide da figura são: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$, $\overline{VE}$.

Os vértices da base da pirâmide são os pontos: A, B, C, D, E e o vértice da pirâmide é o ponto V.

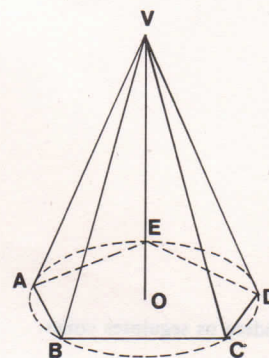
8. Se uma *pirâmide* é *regular*, as faces laterais são triângulos isósceles. Para provar isto, mostre que:

$\triangle OVB \equiv \triangle OVA$

$\overline{OV} \equiv \overline{OV}$ (lado comum)

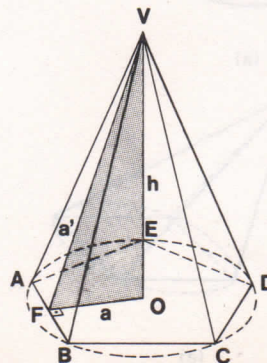
$V\hat{O}B \equiv V\hat{O}A$ ($\overline{OV}$ é perpendicular ao plano da base)

$\overline{OB} \equiv \overline{OA}$ (O é centro do polígono)

Então, $\overline{VB}$ e $\overline{VA}$ são congruentes e, portanto, $\triangle ABV$ é isósceles

9. Se uma *pirâmide* é *regular*, todas as faces laterais são triângulos congruentes, porque são triângulos de lados congruentes: $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC} \equiv \overline{VD} \equiv \overline{VE}$ (lados dos triângulos isósceles) e $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EA}$ (lados do polígono regular).

10. Se uma *pirâmide* é *regular*, a altura de cada face lateral é chamada apótema lateral da pirâmide e, o apótema do polígono da base é chamado apótema da base da pirâmide.

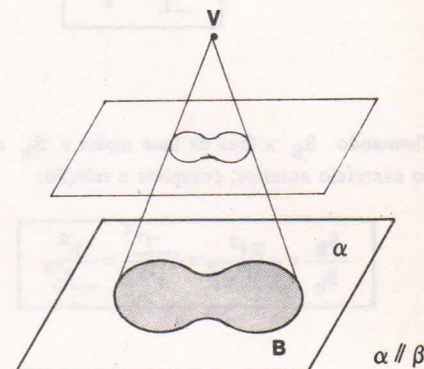
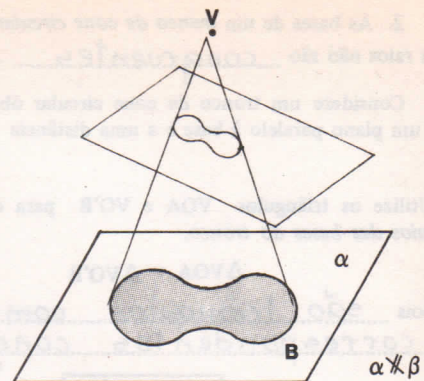
Se h é a altura da pirâmide, a é o apótema da base e a' é o apótema lateral, o $\triangle VOF$ fornece a relação:

$$a'^2 = a^2 + h^2$$

## 62.3. TRONCOS DE CONE

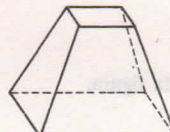
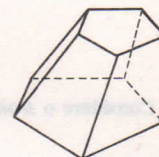
Considere um cone K de base $B \subset \alpha$ e vértice V.

Seja $\beta$ um plano que não possui V tal que se $\overline{PV} \in K$, então $\beta \cap \overline{PV} \neq \phi$.

*Desenhe o cone K e o plano β, e assinale na figura,* $K \cap \beta$.

O plano $\beta$ divide K em duas partes. A parte que não possui o vértice V é chamada **tronco de cone de bases não paralelas** se $\alpha \not\parallel \beta$ e, simplesmente, **tronco de cone** se $\alpha \parallel \beta$.

Observe as seguintes figuras:

(a)

(b)

(c)

(d)

O tronco (a) é um tronco de faces não paralelas, enquanto os demais são troncos de cones.

Um tronco de cone é dito *tronco de cone circular* ou *tronco de pirâmide*, de acordo com o cone que foi seccionado (cone circular ou pirâmide) para formar o tronco.

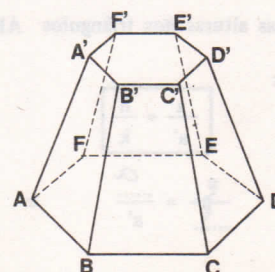
Assim, (b) é um tronco de cone circular reto e (c) é um tronco de pirâmide regular.

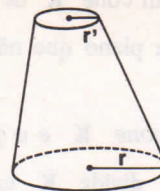
O tronco (d) não é regular porque a pirâmide seccionada não é regular.

## 62.4. FAÇA VOCÊ – TAREFA 61

1. Considere o *tronco de pirâmide regular* da figura. Ele tem duas faces paralelas ABCDEF e A'B'C'D'E'F' que são chamadas bases do tronco.

As outras faces são trapézios porque são quadriláteros com dois lados paralelos.

As bases do tronco de pirâmide não são polígonos congruentes porque seus lados correspondentes não são congruentes, mas são polígonos semelhantes porque são determinados em planos paralelos interceptados por retas concorrentes.

2. As bases de um *tronco de cone circular* são ....círculos........ cujos raios não são ....congruentes....... .

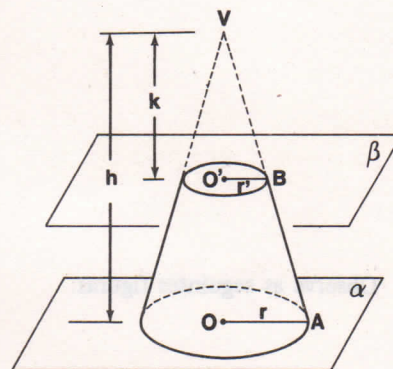
Considere um tronco de cone circular obtido de um cone de altura $h$, com um plano paralelo à base e a uma distância $k$ do vértice.

a) Utilize os triângulos VOA e VO'B para encontrar uma *relação entre os raios das bases do tronco.*

$$\Delta VOA \sim \Delta VO'B$$

pois ....são triângulos com ângulos ....correspondentes congruentes.... .

Logo, $\boxed{\dfrac{r}{r'} = \dfrac{h}{k}}$

b) Chamando $S_B$ a área da base maior e $S_b$ a área da base menor do tronco do exercício anterior, complete a relação:

$$\boxed{\frac{S_B}{S_b} = \frac{\pi r^2}{\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{k^2}}$$

3. Considere o *tronco de pirâmide* da figura.

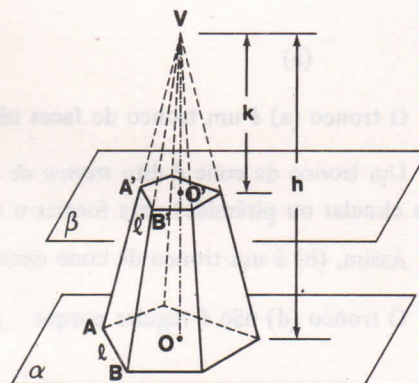
a) Vale a relação:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VB'}}$$

porque ....Δ AVB ~ Δ A'VB'....

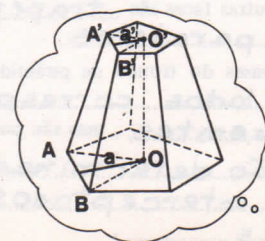
Vale ainda: $\dfrac{\overline{VB}}{\overline{VB'}} = \dfrac{\overline{VO}}{\overline{VO'}} = \dfrac{h}{k}$

porque ....Δ BVO ~ Δ B'VO'....

Logo, temos $\boxed{\dfrac{\ell}{\ell'} = \dfrac{h}{k}}$

b) Considere as alturas dos triângulos ABO e A'B'O', respectivamente, $a$ e $a'$.

Então vale:

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{h}{k}}$$

porque $\dfrac{\ell}{\ell'} = \dfrac{a}{a'}$ e $\dfrac{\ell}{\ell'} = \dfrac{h}{k}$

c) Concluimos, agora, que:

$$\frac{S_B}{S_b} = \frac{h^2}{k^2}$$

porque $\quad \frac{S_B}{S_b} = \frac{a^2}{a'^2} \quad$ e $\quad \frac{a}{a'} = \frac{h}{k}$

## 62.5. ÁREAS DOS CONES

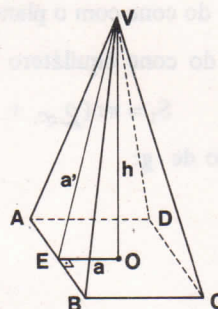
a) A **área lateral** de uma **pirâmide** é a *soma das áreas de suas faces laterais.*

Considere uma *pirâmide regular* cuja base é um quadrado de 2 cm de lado e cuja altura é 5 cm.

Cada face lateral é um triângulo ....isósceles.... cuja base mede 2 cm.

Para calcular a área de cada um desses triângulos, basta calcular o apótema lateral da pirâmide.

$a'^2 = a^2 + h^2 \qquad a'^2 = (\sqrt{1})^2 + 5^2 = 26 \qquad a' = \sqrt{26}$ cm

Logo, a área lateral da pirâmide é: $\qquad S_\ell = 4 \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{2}{2} = 4\sqrt{26}\ cm^2$

b) A **área total** da **pirâmide** é a *soma das áreas de todas as suas faces.*

$$S_t = S_\ell + S_b$$

Para a pirâmide do ítem a): $\qquad S_t = 4\sqrt{26} + 4 = 4(\sqrt{26} + 1)\ cm^2$

c) A **área lateral** de um **cone circular reto** é a área do setor circular de raio **g** e de comprimento $2\pi r$, onde **g** é a medida da geratriz do cone e **r** é o raio de sua base.

Observe que o setor circular de comprimento $2\pi r$ e raio **g** corresponde a um ângulo de **x** radianos, dado pela proporção:

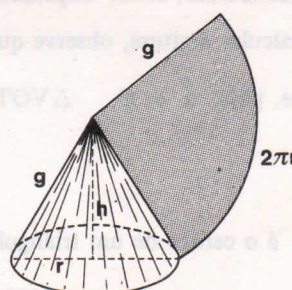
$$\frac{2\pi g}{2\pi} = \frac{2\pi r}{x} \Longrightarrow x = \frac{2\pi r}{g}$$

porque o comprimento total da circunferência de raio g, $2\pi g$, corresponde a um ângulo central de $2\pi$ radianos.

A área lateral do setor circular de ângulo central **x** rd é dada pela proporção:

$$\frac{\pi g^2}{2\pi} = \frac{S_\ell}{x} \Longrightarrow S_\ell = \frac{x g^2}{2}$$

Logo, levando em conta a expressão de **x**,

$$S_\ell = \pi r g$$

d) A **área total** de um **cone circular reto** é a soma da área lateral com a área de sua base.

Assim, $S_t = S_\ell + S_b$

Em função de r e g, temos: $S_t = \pi r g + \pi r^2$ ou $S_t = \pi r (g + r)$

e) Um cone circular reto tal que $2r = g$ é chamado **cone equilátero**.

*Desenhe um cone equilátero.*

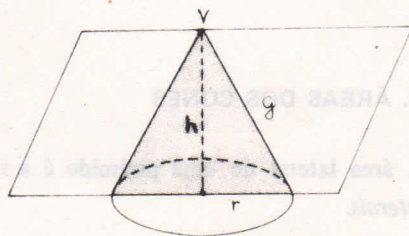
*Desenhe um plano perpendicular à base do cone* e que possua seu vértice.

A intersecção do cone com o plano é um triângulo equilátero.

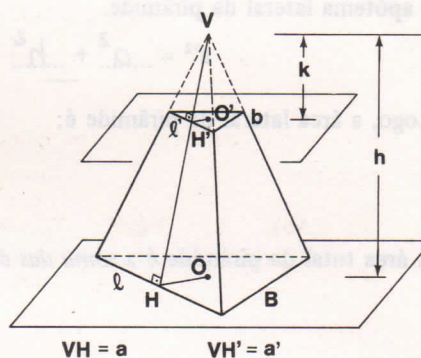
A **área total** do cone equilátero pode ser escrita em função de r:

$$S_t = \pi r (2r + r) = 3\pi r^2$$

ou, em função de g:

$$S_t = \pi \cdot \frac{g}{2} \left(g + \frac{g}{2}\right) = \frac{3\pi g^2}{4}$$

f) Considere um *tronco de pirâmide* obtido de uma pirâmide triangular regular de altura 6 cm, com um plano paralelo à base a 2 cm do vértice. Sabendo-se que o triângulo da base tem 3 cm de lado, calcular a área total do tronco.

Temos: $\frac{\ell}{\ell'} = \frac{h}{k}$ $\ell = 3$ cm, $h = 6$ cm, $k = 2$ cm

Logo, $\ell' = \frac{3 \cdot 2}{6} = 1$ cm

As faces laterais, sendo trapézios, a área de cada face se calcula como semi-soma das bases vezes altura.

Para calcular a altura, observe que: $\frac{a}{a'} = \frac{h}{k}$ e a altura é $a - a'$.

Calcule, pois, a e a'. $\Delta VO'H'$: $(VH')^2 = (VO')^2 + (H'O')^2$

$$a'^2 = k^2 + \left(\frac{1}{3} \frac{\ell' \sqrt{3}}{2}\right)^2$$

pois, O' é o centro de um triângulo equilátero.

$\Delta VOH$: $(VH)^2 = (VO)^2 + (HO)^2$

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3} \frac{\ell \sqrt{3}}{2}\right)^2$$

pois, O é o centro de um triângulo equilátero.

Numericamente: $a'^2 = \frac{49}{12}$ cm² $\Longrightarrow a' = \frac{7}{6}\sqrt{3}$ cm

$a^2 = \frac{147}{4}$ cm² $\Longrightarrow a = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm

Logo: $h' = a - a' = \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$ cm

Assim, a *área de cada face* será: $\frac{\ell' + \ell}{2} \cdot h' = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm²

E, a *área lateral:* $S_\ell = 14\sqrt{3}$ cm²

As *áreas das bases* são as áreas dos dois triângulos equiláteros:

$$S_B = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \Longrightarrow S_B = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

$$S_b = \frac{\ell'^2 \sqrt{3}}{4} \Longrightarrow S_b = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

Portanto, **área total**: $S_t = S_\ell + S_b + S_B$ assim: $S_t = \frac{33\sqrt{3}}{2}$ cm².

## 63. OS POLIEDROS

### 63.1. SUPERFÍCIE POLIÉDRICA FECHADA

Considere a figura geométrica que é a reunião de um número finito de polígonos tais que:

a) 2 quaisquer dos polígonos não estão contidos no mesmo plano.

b) cada lado de qualquer polígono é lado comum de dois polígonos.

c) toda a figura está contida em um mesmo semi-espaço em relação ao plano de qualquer um dos polígonos.

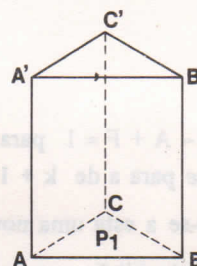
Por exemplo, considere os polígonos que são as faces de um prisma triangular:

$P_1 = ABC$; $P_2 = A'B'C'$; $P_3 = AA'B'B$;

$P_4 = BB'C'C$ ; $P_5 = CC'A'A$

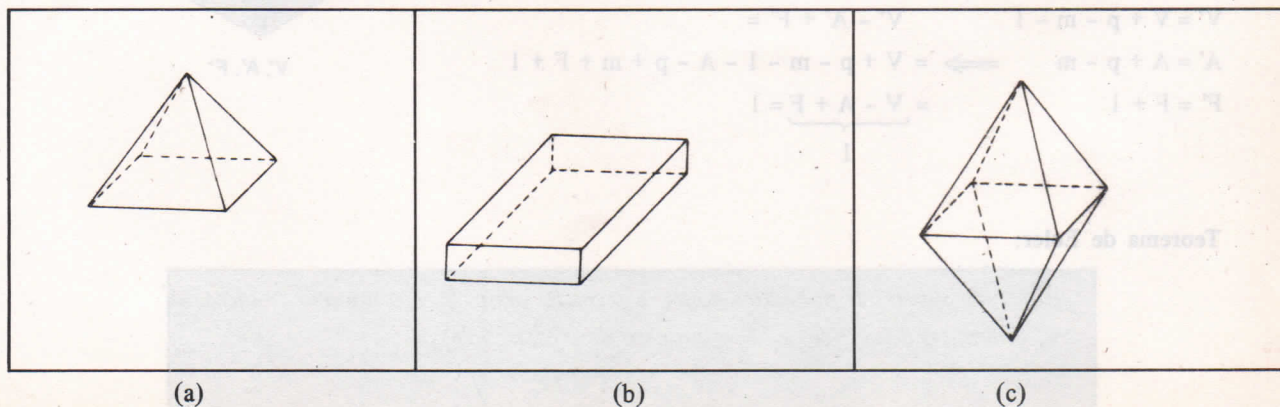
Verifique que a figura geométrica

$K = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$

tem as características acima.

A figura geométrica assim obtida é chamada **superfície poliédrica convexa fechada.**

Os polígonos da superfície poliédrica são chamados **faces**; os lados dos polígonos são as **arestas** da superfície; os vértices dos polígonos são os **vértices** da superfície.

Consiga outros exemplos de superfícies poliédricas convexas fechadas, por exemplo, considerando superfícies de pirâmides, de prismas, ou combinação de tais sólidos:

(a) (b) (c)

Chamando F o número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas de cada superfície, temos:

- para a superfície (a): F = 5 V = 5 A = 8
- para a superfície (b): F = 6 V = 8 A = 12
- para a superfície (c): F = 8 V = 6 A = 12

Calcule, em cada caso, o número: $V - A + F$.

Você observou que: $V - A + F = 2$

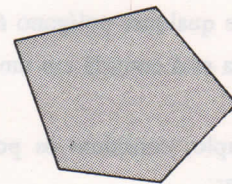
Para demonstrarmos a validade desta relação para toda superfície poliédrica convexa fechada, note:

**Lema de Euler:**

*"Se a superfície poliédrica convexa é aberta, vale a relação:* $V - A + F = 1$ "

**Demonstração (por indução):**

1º) *Verifica-se* que $V - A + F = 1$ vale para uma superfície poliédrica de *uma* só *face*.

$$\left.\begin{array}{l} V = A \\ F = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow V - A + F = 1 \text{ (verdadeira)}$$

2º) *Admite-se* $V - A + F = 1$ para uma superfície poliédrica de k *faces* e *prova-se* para a de $k + 1$ *faces*.

Acrescentando-se a esta uma nova face com p arestas teremos:

m arestas coincidirão com as anteriores

e

m + 1 vértices coincidirão com os anteriores.

V, A, F

Logo:

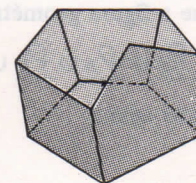
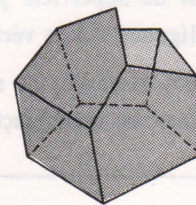
p – m são as arestas livres

e

p – (m + 1) são os vértices livres.

V', A', F'

Então:

$$\left.\begin{array}{l} V' = V + p - m - 1 \\ A' = A + p - m \\ F' = F + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} V' - A' + F' = \\ = V + p - m - 1 - A - p + m + F + 1 \\ = \underbrace{V - A + F}_{1} = 1 \end{array}$$

**Teorema de Euler:**

*Para toda superfície poliédrica convexa fechada, onde* F *é o número de faces,* V, *o número de vértices e* A, *o número de arestas, vale:*

$V - A + F = 2$

Seja uma superfície poliédrica convexa fechada.

Desejamos provar que vale $V - A + F = 2$

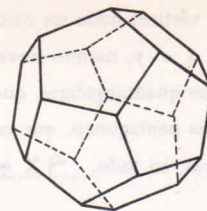
Basta retirar uma face e valerá o Lema demonstrado, isto é:

$$V - A + F_a = 1$$

onde $F_a$ representa o número de faces da superfície aberta.

Então: $F_a = F - 1$

Recolocando-se a face que se retirou, tem-se:

$$V - A + (F - 1) = 1 \Longrightarrow V - A + F = 2$$

## 63.2. POLIEDROS CONVEXOS

Considere uma superfície poliédrica convexa fechada. Para cada face $P_i$ da superfície, considere o semi-espaço $E_i$ que contém toda a superfície.

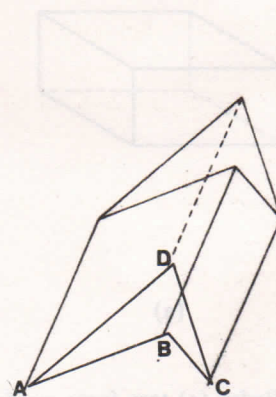
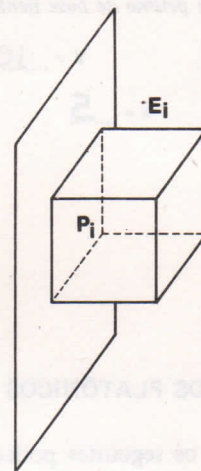
A região do espaço que é a intersecção dos semi-espaços $E_i$ considerados, é um **poliedro convexo.**

Assim, por exemplo, um *cubo* é um *poliedro convexo.*

São exemplos de poliedros convexos, as regiões do espaço determinadas pelas superfícies (a), (b) e (c) do parágrafo 63.1.

*Todos os prismas e todas as pirâmides cujas bases são polígonos convexos são poliedros convexos.*

*Desenhe* um prisma cuja base seja um quadrilátero não convexo ABCD.

Este prisma não é um poliedro convexo porque a figura não está contida num mesmo semi-espaço em relação ao plano de qualquer um dos polígonos das faces ..................... .

## 63.3. FAÇA VOCÊ – TAREFA 62

1. Um poliedro convexo tem 9 faces das quais 3 são quadrangulares e as outras são triangulares. Quantos ***vértices*** e quantas ***arestas*** tem o poliedro?

A idéia é contar o número de arestas, contando o número de lados dos polígonos das faces:

- temos 3 quadriláteros, que contribuem com 12 lados.
- temos 6 triângulos, que contribuem com 18 lados.

Então, temos, ao todo, 30 lados de polígonos. Como cada 2 lados determinam uma única aresta, A = 15 .

Então, aplicando o teorema de Euler, V = A - F + 2 ⟹ V = 8 .

2. Um poliedro convexo tem 7 faces sendo x quadrangulares e y pentagonais. Sabendo-se que o poliedro tem 15 arestas, calcular o *número de vértices* e o *número de faces* de cada tipo.

– O número de vértices pode ser calculado imediatamente pelo teorema de Euler: V = ..A – F + 2...... = ...10

– Para calcular x e y, usamos novamente a contagem das arestas a partir do número de lados dos polígonos:

- temos x faces quadrangulares, que contribuem com ..4x. lados.
- temos y faces pentagonais, que contribuem com ..5y. lados.

Logo, temos, ao todo, ....4x + 5y...... lados e o número de arestas é a metade desse número $A = \frac{4x+5y}{2}$

Mas, como A = 15, temos ......4x + 5y...... = 30.

Como x + y = ...7.. , temos o sistema:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 30 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

resolvendo o sistema, temos: x = ...5 y = ...2

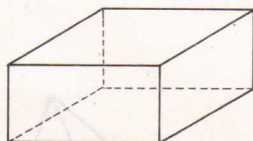
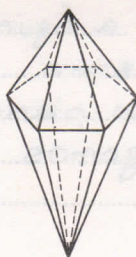
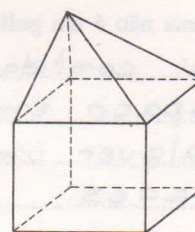
isto é, temos 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais.

*Desenhe um prisma de base pentagonal* e complete:

F = ...7 V = ...10 A = ...15

x = ...5 y = ...2

## 63.4. POLIEDROS PLATÔNICOS

Considere os seguintes poliedros:

(a)

(b)

(c)

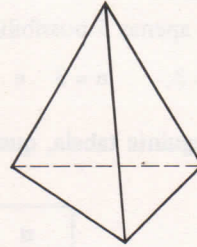
O poliedro (a) tem faces quadrangulares; o poliedro (b) tem faces ...triangulares........ e o poliedro (c) tem faces ....triangulares........ e faces ...quadrangulares... .

Olhando para os vértices do poliedro (a), vemos que a cada vértice concorrem 3 arestas. Quanto ao poliedro (b), existem 6 vértices aos quais concorrem ..4. arestas e 2 vértices aos quais concorrem ..6.. arestas. Para o poliedro (c), existem ..4. vértices aos quais concorrem ..4.. arestas e ..5.. vértices aos quais concorrem ...... arestas.

> *Os poliedros convexos tais que todas as faces são polígonos com mesmo número de lados e, a cada vértice concorre o mesmo número de arestas, são chamados* **poliedros de Platão** *(ou poliedros platônicos).*

Dos três poliedros acima, apenas o (a) é de Platão.

Baseados nesta definição, podemos afirmar que entre os prismas, apenas aqueles cujas bases são quadriláteros convexos são poliedros de Platão porque todas as suas faces são quadriláteros e, assim, a cada vértice concorrem 3 arestas.

Entre as pirâmides, apenas as triangulares são poliedros de Platão porque todas as suas faces são triângulos e a cada vértice concorrem 3 arestas.

### 63.5. O TEOREMA DE PLATÃO

*Só existem 5 poliedros de Platão.*

**Prova:**

Um poliedro de Platão tem todas as faces de um mesmo tipo. Suponhamos que sejam polígonos de n lados ($n \geqslant 3$).

Então, se o número de faces é F, o número de lados de todos os polígonos é $nF$ e, portanto, o número de arestas do poliedro é

$$A = \frac{nF}{2}.$$

Por outro lado, a cada vértice de um poliedro de Platão concorre o mesmo número de arestas. Seja r esse número (logo, $r \geqslant 3$) e seja V o número de vértices.

Então, contando as arestas, vértice por vértice, cada aresta será contada duas vezes porque, cada aresta concorre a dois vértices. Assim,

$$2A = rV.$$

As duas igualdades encontradas permitem que se escreva F e V em função de A:

$$F = \frac{2A}{n} \qquad \text{e} \qquad V = \frac{2A}{r}$$

Aplicando o teorema de Euler,

$$V - A + F = 2$$

temos, em função de A,

$$\frac{2A}{r} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

Como $A \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da igualdade por $2A$ e temos:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{2}$$

e, como $A > 0$,

$$\boxed{\frac{1}{r} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}}$$

Já sabemos que $r \geqslant 3$ e $n \geqslant 3$. Suponha $r > 3$ e $n > 3$. Isto é, $r \geqslant 4$ e $n \geqslant 4$

$$\frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{4}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$$

o que é absurdo, porque $\frac{1}{r} + \frac{1}{n}$ deve ser maior que $\frac{1}{2}$.

Logo, ou $r = 3$ ou $n = 3$.

Se $r = 3$, isto é, $\frac{1}{3} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \Longrightarrow n < 6$, isto é, $n = 3$ ou 4 ou 5.

Se $n = 3$, isto é, $\frac{1}{r} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2} \Longrightarrow r < 6$, isto é, $r = 3$ ou 4 ou 5.

Assim, temos apenas 5 possibilidades:

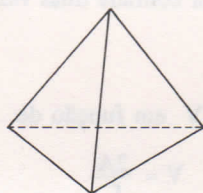
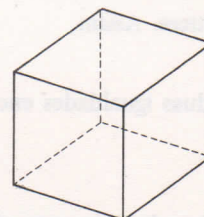
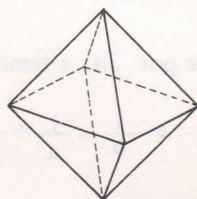
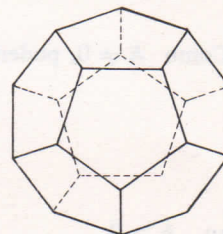
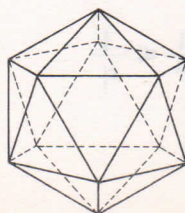
$n = 3$ e $r = 3$; $n = 3$ e $r = 4$; $n = 3$ e $r = 5$; $n = 4$ e $r = 3$; $n = 5$ e $r = 3$

Complete a seguinte tabela, que fornece os nomes dos 5 poliedros de Platão:

| n | r | A | V | F | nome |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 6 | 4 | 4 | tetraedro |
| 3 | 4 | 12 | 6 | 8 | octaedro |
| 3 | 5 | 30 | 12 | 20 | icosaedro |
| 4 | 3 | 12 | 8 | 6 | hexaedro |
| 5 | 3 | 30 | 20 | 12 | dodecaedro |

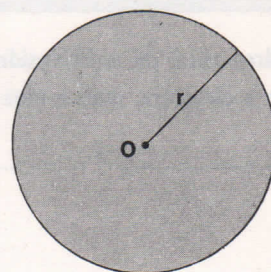
*Os poliedros de Platão cujas faces são polígonos regulares congruentes são chamados* **poliedros regulares.**

Assim, também, só podem existir 5 poliedros regulares:

O tetraedro regular que tem 4 faces que são triângulos equiláteros.

O hexaedro regular que tem 6 faces que são quadrados.

O octaedro regular que tem 8 faces que são triângulos equiláteros.

O dodecaedro regular ou cubo que tem 12 faces que são pentágonos regulares

O icosaedro regular que tem 20 faces que são triângulos equiláteros.

## 64. OUTROS SÓLIDOS

### 64.1. A ESFERA

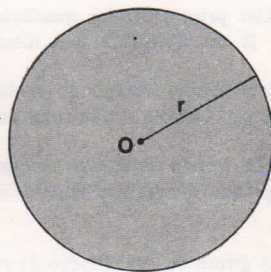
*Uma esfera de centro* **O** *e raio* **r** *é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto* **O** *é menor ou igual a* **r**, *isto é,*

$$\{P \mid \text{med}(\overline{PO}) \leq r\}$$

A **superfície esférica** é, intuitivamente, a "casca" da esfera. Elabore, baseado na definição de esfera, uma definição para superfície esférica.

Uma superfície esférica de centro **O** e raio **r** é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é igual a r.

### 64.2. A ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A área da superfície esférica é dada por:

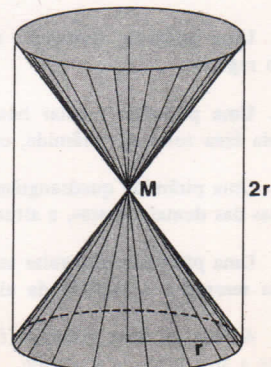
$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

*Observações:*

- Deixaremos de demonstrar aqui esta fórmula visto que a demonstração, bastante trabalhosa, foge à linha proposta neste curso.
- Por simplicidade na proposição dos problemas, diremos algumas vezes "área da esfera" em lugar de "área da superfície esférica que limita a esfera".

### 64.3. A CLEPSIDRA

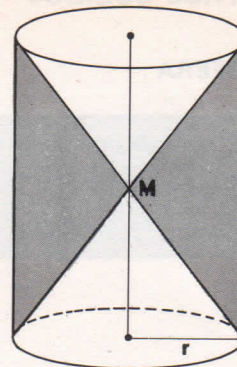
*A* **clepsidra** *é a reunião dos dois cones de revolução cujas bases são as bases de um mesmo cilindro equilátero e, cujo vértice comum é o ponto médio do eixo do cilindro.*

A **área total** da clepsidra é a soma das áreas totais dos cones que a compõem. Logo, se o cilindro tem raio r:

$$S_t = \pi r^2(\sqrt{2}+1) + \pi r^2(\sqrt{2}+1) = 2\pi r^2 \cdot (\sqrt{2} + 1)$$

### 64.4. A ANTICLEPSIDRA

> *A* **anticlepsidra** *é o conjunto dos pontos do cilindro equilátero que não pertencem à clepsidra.*

A área total da anticlepsidra é a soma das áreas laterais dos cones, que compõem a clepsidra, mais a área lateral do cilindro.

$S_t$ = ........................ + ........................ + .................... = ............................

## 65. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. A soma das áreas de todas as faces de um cubo é P $cm^2$. Qual a medida de sua diagonal?

2. A diagonal de um cubo mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine a diagonal de cada face e a área total do cubo.

3. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são termos consecutivos de uma sequência aritmética e sua soma é 15 cm. Sabendo-se que a área total é 142 $cm^2$, determine as dimensões.

4. Num prisma reto de base quadrada, a soma das 12 arestas é 7 m e a área total é 2 $m^2$. Determine as medidas de todas as arestas.

5. Um prisma regular quadrangular tem altura igual ao dobro da diagonal da base. Sabe-se que uma das diagonais do prisma mede D cm. Calcule a área total do prisma.

6. Um prisma hexagonal regular tem altura igual ao triplo do apótema da base. Sabe-se que o raio da circunferência circunscrita à base é R cm. Calcule a área total do prisma e a medida de uma de suas diagonais.

7. Um tronco de prisma tem por base inferior um triângulo equilátero de 3 cm de lado contido em um plano perpendicular à aresta lateral do prisma. Os vértices da base superior distam, respectivamente, 5 cm, 4 cm e 3 cm do plano da base inferior. Determine a área total do tronco.

8. A altura de um cilindro de revolução é igual ao dobro do raio da base. Calcule a área lateral desse cilindro, sabendo-se que sua área total é 180 $m^2$.

9. Calcule a área de um cilindro de revolução cuja altura é igual ao comprimento da circunferência da base, sendo o raio igual a 5 m.

10. Calcule a área lateral e a área total de um cilindro equilátero cuja base tem 26 cm de raio.

11. Um cilindro tem 4 m de altura. Conservando-se a altura e aumentando-se de 1 m o raio desse cilindro, a área lateral do novo cilindro é igual a área total do cilindro primitivo. Calcule o raio do primeiro cilindro.

12. Calcule o raio do cilindro equilátero em que a área lateral excede de 214 $m^2$ a área da secção meridiana.

13. Calcule a área da secção paralela ao eixo de um cilindro de 8 m de altura e 1 m de raio, feita a 0,6 m do eixo.

### Sequência 2

1. Uma pirâmide triangular tem a altura igual a um lado da base. Conhecida a medida $\ell$, deste lado, determine a área lateral da pirâmide.

2. Uma pirâmide triangular regular tem o perímetro da base igual a 6 cm. Calcule a altura da pirâmide para que ela seja um tetraedro regular.

3. Uma pirâmide regular hexagonal é tal que o apótema lateral a é o triplo do apótema da base da pirâmide. Determine a medida da área total da pirâmide, em função de a.

4. Uma pirâmide quadrangular regular tem apótema igual à diagonal da base. Sendo L cm a medida de uma aresta lateral, pede-se as medidas das demais arestas, a altura e a área total da pirâmide.

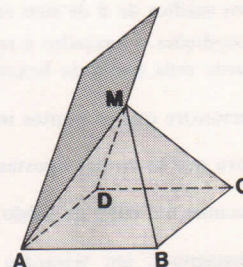
5. Uma pirâmide triangular tem uma face que é um triângulo equilátero de lado L cm. A projeção do vértice oposto a esta face é o centro da mesma e a medida da altura relativa a ela é L cm. Determine as medidas das demais arestas e a área total da pirâmide.

6. A base de uma pirâmide é um quadrado de 3 cm de lado. Uma aresta lateral é perpendicular ao plano da base e mede 4 cm. Determine a área total da pirâmide.

7. Calcule a altura de uma pirâmide regular de base quadrada cujo lado mede 2 m, sabendo que sua área lateral é $\frac{5}{8}$ da área lateral de um prisma reto, de base e altura iguais às da pirâmide.

8. Uma pirâmide quadrangular regular tem apótema da base $a$ e o apótema da pirâmide é dado por $a\sqrt{3}$. Calcule a inclinação de cada aresta lateral em relação ao plano da base.

9. Uma pirâmide quadrangular regular tem arestas da base $\ell$ e as arestas laterais dadas por $\frac{\ell\sqrt{5}}{2}$. Calcule a medida do diedro formado pelo plano de uma face lateral com o plano da base.

10. O perímetro da base ABCD de uma pirâmide quadrangular regular de vértice M é 24 m e a altura é 4 m. Calcule a distância do vértice B ao plano da face oposta ADM.

11. Calcule a área lateral da pirâmide que se obtém seccionando um cubo de aresta $a$ por um plano determinado por 3 vértices não contidos na mesma face.

12. Determine a área total de um tronco de pirâmide regular cujas bases são quadrados de 10 cm e 4 cm de lados, respectivamente, sabendo que a altura do tronco é de 4 cm.

13. A que distância do vértice de um cone de revolução, de 1 m de altura, se acha uma secção paralela à base e de área igual ao terço desta?

14. A secção paralela à base de um cone, feita a 84 cm do vértice, tem 10 cm de raio. Calcular a distância ao vértice de uma secção de 4,5 cm de raio.

15. A geratriz de um cone de revolução forma, com o eixo, um ângulo de 30°. Calcular a área total desse cone, sabendo-se que o raio é de 5 m.

16. Calcular a altura do cone de revolução de 1 m de raio, sabendo-se que a base é equivalente à secção que contém o eixo.

17. Um cone tem 1,2 m de raio e 0,9 m de altura. Calcular o ângulo do setor circular que se obtém pelo desenvolvimento da superfície lateral do cone sobre um plano.

18. A área lateral de um cone de revolução é 1 256 $m^2$. Calcular o raio, sabendo-se que a geratriz tem 40 m.

19. Calcular a área lateral do cone equilátero cuja altura mede 7 m.

20. Calcular a altura do cone equilátero cuja área lateral tem 31,4 $m^2$.

21. A diferença entre a área lateral de 2 cones de revolução, cujos raios são 3 cm e 8 cm, respectivamente, é $65\pi$ $cm^2$. Sabe-se que as geratrizes dos cones estão entre si como 1 está para 2. Determinar uma relação entre as alturas dos cones.

22. Desenvolvendo-se a superfície lateral de um cone de revolução, sobre um plano, obtém-se um setor circular de 135° e de 6 cm de raio. Calcular a área lateral.

23. Calcular a área lateral de um tronco de cone de revolução, de 3 m de altura, sendo 2 m e 1 m os raios das bases.

## Sequência 3

1. Um poliedro convexo tem 40 arestas. O número de faces é igual ao número de vértices. Quantas são as faces do poliedro?

2. Num poliedro convexo de 28 arestas, o número de faces é $\frac{2}{3}$ do número de vértices. Quantos são os vértices?

3. Quantos são os vértices de um poliedro convexo de 8 faces, todas triangulares?

4. Quantos são os vértices de um poliedro convexo de 5 faces triangulares, 3 quadrangulares e 5 pentagonais?

5. Num poliedro convexo as faces são triangulares ou quadrangulares; sabe-se que o número de faces triangulares é o dobro do número de faces quadrangulares e que os vértices são 14. Determine:

a) quantas faces e quantas arestas tem o poliedro.
b) qual o número de faces de cada tipo.

6. Um poliedro convexo tem $a$ faces triangulares e $b$ faces quadrangulares. Existem 6 vértices e em cada um dos quais concorrem $b + 1$ arestas e 2 vértices, em cada um dos quais concorrem $\frac{a}{2}$ arestas. Se o número de faces é 9, determine o número de faces triangulares e o de faces quadrangulares.

7. Um poliedro convexo tem $p$ faces triangulares e $q$ faces quadrangulares. 13 é o número de faces e 12 é o número de vértices. Determine o número de faces de cada tipo.

8. Dado um cubo, considera-se o poliedro cujos vértices são os pontos médios das faces do cubo (intersecção das diagonais). Pergunta-se:

a) Que poliedro se obtém?
b) Quantas são suas faces e como são?
c) Quantos vértices e quantas arestas tem?

9. Dado um octaedro regular cujas arestas medem 8 cm, considera-se o hexaedro inscrito no octaedro, cujos vértices coincidem com os pontos médios de 8 de suas arestas. Pergunta-se:

a) Em que condições o hexaedro é regular?
b) Quanto mede cada aresta do hexaedro?

10. Demonstre que os pontos médios das arestas de um tetraedro regular são vértices de um octaedro regular.

11. Prove que as arestas opostas (as que não têm ponto comum) de um tetraedro regular são ortogonais.

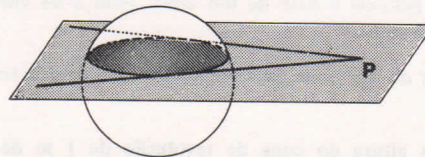
12. Seccione um cubo de modo que a secção seja um hexágono. Justifique a solução.

13. Intercepta-se um tetraedro por um plano paralelo a duas arestas opostas. Demonstre que a secção é um paralelogramo. Demonstre também que, se o tetraedro for regular, a secção é um retângulo.

**Sequência 4**

1. Justifique a afirmação: "Se uma superfície esférica possui os pontos A e B, o seu centro está no plano mediador do segmento AB."

2. Prove que a intersecção de um plano $\alpha$ com uma superfície esférica, se não for vazio ou unitário, é uma circunferência.

3. Prove que, se por um ponto P, externo a uma superfície esférica, traçarmos duas retas tangentes à mesma, os segmentos determinados sobre as retas são congruentes.

4. Uma esfera de raio R e um cone de revolução, de raio R e altura 2R, estão apoiados sobre um plano $\pi$. A que distância do plano $\pi$ deve estar um plano $\alpha /\!/ \pi$, para que as secções desse plano com a esfera e com o cone sejam equivalentes?

5. Uma esfera tem 6 m de raio. Calcule a que distância do centro se acha uma secção plana, cuja área é um quarto da área do círculo máximo da esfera.

6. Calcule a área de uma esfera cujo círculo máximo tem $64\pi$ m de circunferência.

7. Calcule a área de uma esfera sabendo-se que o apótema do hexágono regular inscrito em seu círculo máximo tem 75 m.

8. Calcule a área total da clepsidra e da anticlepsidra do cilindro equilátero de raio 2 cm.

9. Considere uma esfera de raio 5 cm e um cilindro equilátero de raio 5 cm, ambos apoiados num plano $\alpha$. Considere um plano $\beta /\!/ \alpha$, a 2 cm de $\alpha$, que intercepta os sólidos. Calcule a área da intersecção de $\beta$ com cada um dos sólidos.

# VOLUMES

## 66. PRELIMINARES

### 66.1. A FUNÇÃO VOLUME

Consideremos o conjunto $\Omega$ de todos os sólidos geométricos. Este conjunto contém os cilindros, os cones, os poliedros, as esferas, etc. . . . e todas as combinações desses sólidos.

O volume de um sólido $K \in \Omega$ é um número real $v \in \mathbf{R}$ que associamos a K.

Logo, o volume, é uma .........função........ de $\Omega$ em **R**. $v: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.

Esta associação não é arbitrária. Ela deve obedecer algumas regras, as quais definem a função volume.

> *A* **função volume** *é uma aplicação do conjunto dos sólidos geométricos,* $\Omega$, *em* **R**.
>
> $$v: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$
>
> *tal que:* a) *Se* $M, N \in \Omega$ e $M$ *é congruente a* $N$, *então* $v(M) = v(N)$.
>
> b) *Se* $M, N \in \Omega$ e $M \subset N$, *então* $v(M) \leqslant v(N)$.
>
> c) *Se* $M, N \in \Omega$ e $M \cap N \notin \Omega$, *então* $v(M \cup N) = v(M) + v(N)$.
>
> d) *Se* $M \in \Omega$ *é um cubo de aresta unitária, então* $v(M) = 1$.

## 66.2. FAÇA VOCÊ – TAREFA 63

1. Considere os dois cubos $K_1$ e $K_2$ de aresta unitária, da figura.

Pelo ítem (d) da definição: $v(K_1) =$ ..1.. $v(K_2) =$ ..1..

Por outro lado, $K_1 \cap K_2 =$ ..BEE'B'.. e, como o quadrado BEE'B' não pertence ao conjunto $\Omega$ dos sólidos geométricos temos, pelo ítem (c) da definição,

$v(K_1 \cup K_2) =$ ....v(K1) + v(K2)....

Logo, concluímos que o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões ..2.., ..1.., ..1.. é ..2..

2. Considere um cubo K de aresta unitária e bases ABCD – A'B'C'D' e o plano $\alpha$ determinado por BB'D'. Pela figura determinemos:

$\alpha \cap K =$ ...BB'D'D...

O plano $\alpha$ divide o cubo em dois ..prismas.. retos de bases triangulares. Chame $K_1$ e $K_2$ esses prismas.

É fácil ver que eles são congruentes.

Então pela parte (a) da definição, ....v(K1) = v(K2)....

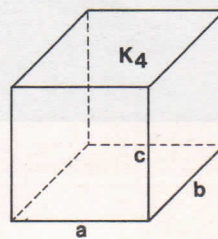
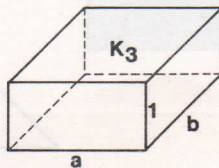
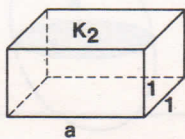
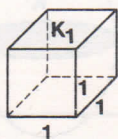
Por outro lado, $K_1 \cap K_2 =$ ....BB'D'D...., e esta intersecção ..não pertence.. ao conjunto $\Omega$.

Logo pela parte (c) da definição:

| ....v(K1 ∪ K2).... $= v(K_1) +$ ....v(K2).... |
|---|

Como $K = K_1 \cup K_2$, temos, pela parte (d) da definição, $v(K_1 \cup K_2) =$ ..1..

Por estes três resultados concluímos que: $v(K_1) =$ ..1/2.. e $v(K_2) =$ ..1/2..

3. Considere os paralelepípedos retângulos da figura onde a, b e c são números inteiros.

Temos por (d), que $v(K_1) =$ ..1..

O paralelepípedo $K_2$ pode ser dividido em um número ..a.. de cubos. Logo, por (c) temos $v(K_2) =$ ..a.1.. = ..a..

O paralelepípedo $K_3$ pode ser dividido em um número ..b.. de paralelepípedos congruentes a $K_2$. Logo por (a) e (c), temos:
$v(K_3) =$ ..a.b..

O paralelepípedo $K_4$ pode ser dividido em um número ..c.. de paralelepípedos congruentes a $K_3$. Logo por (a) e (c),
$v(K_4) =$ ..a.b.c..

4. Generalizando o exercício 3, você pode definir.

| *O volume de um paralelepípedo retângulo* K, *de dimensões* a, b, c é: v(K) = a . b . c |
|---|

agora estamos considerando a, b, c∈R e não, necessariamente, números inteiros.

5. Considere um paralelepípedo retângulo K, de dimensões a, b, c.

Chamando $S_b$ a área da face escolhida como base, e h a altura relativa a essa base, temos que: $S_b$ = a . b h = c

Por outro lado, v(K) = a . b . c .

Logo, em função da área da base e da altura do paralelepípedo, temos: v(K) = $S_b$ . h

## 66.3. O PRINCÍPIO DE CAVALIÈRE

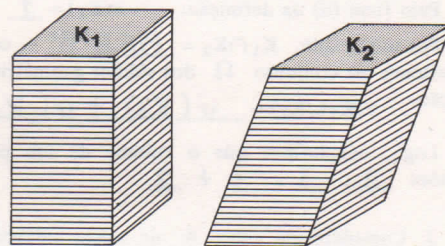
Consideremos um prisma constituído de uma pilha de **N** cartões retangulares.

Suponhamos que cada cartão tem dimensão a por b e espessura c.

Logo cada cartão é um paralelepípedo retângulo e seu volume é:

v = a . b . c

O volume do prisma $K_1$, formado pelos cartões é:

$v(K_1)$ = N . a . b . c

Modifiquemos, agora, a pilha de cartões de modo a obter um prisma $K_2$ diferente do primeiro.

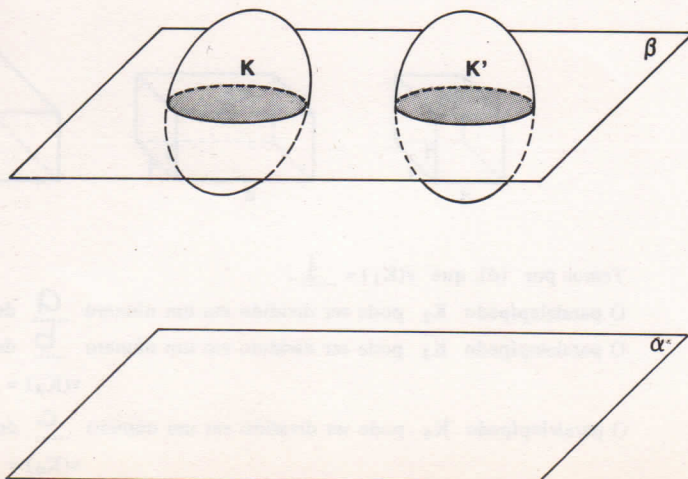
$v(K_2)$ = N . a . b . c

Você pode obter sólidos geométricos diferentes, não prismas, com os mesmos cartões e sempre,

v = N . a . b . c

O que determina, neste caso, o volume do sólido é o número de cartões e o volume de cada cartão.

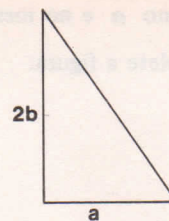
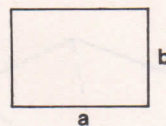
O **princípio de Cavalière** se baseia nesta idéia intuitiva. Ele pode ser enunciado:

> *Dados dois sólidos,* K *e* K', *e um plano* α.
> *Se, qualquer que seja o plano* β, β // α, *tivermos*
>
> $\beta \cap K$ *e* $\beta \cap K'$
>
> *com mesma área, então:*
>
> v(K) = v(K')

## 66.4. FAÇA VOCÊ – TAREFA 64

1. Considere $N$ cartões retângulares de dimensões $a$ e $b$ e um prisma $K_1$ formado por eles.

Considere também outros $N$ cartões em forma de triângulos retângulos cujos catetos medem $a$ e $2b$ e um prisma $K_2$ formado por eles.

Suponha que as espessuras dos $2N$ cartões são iguais.

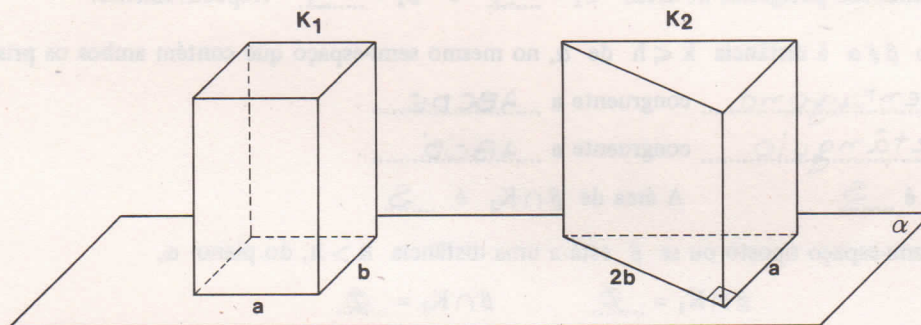
A área da base de $K_1$ é $S_1 =$ a.b. e a área da base de $K_2$ é $S_2 =$ a.b.

2. Considere o plano $\alpha$, da mesa em que os dois prismas estão apoiados.

Seja $\beta /\!/ \alpha$ um plano que intercepta ambos os prismas. Então, $\beta \cap K_1$ é um retângulo de área a.b. Do mesmo modo, $\beta \cap K_2$ é um triângulo retângulo de área a.b.

Se um plano $\gamma /\!/ \alpha$ é tal que $\gamma \cap K_1 = \phi$, então, $\gamma \cap K_2 = \phi$.

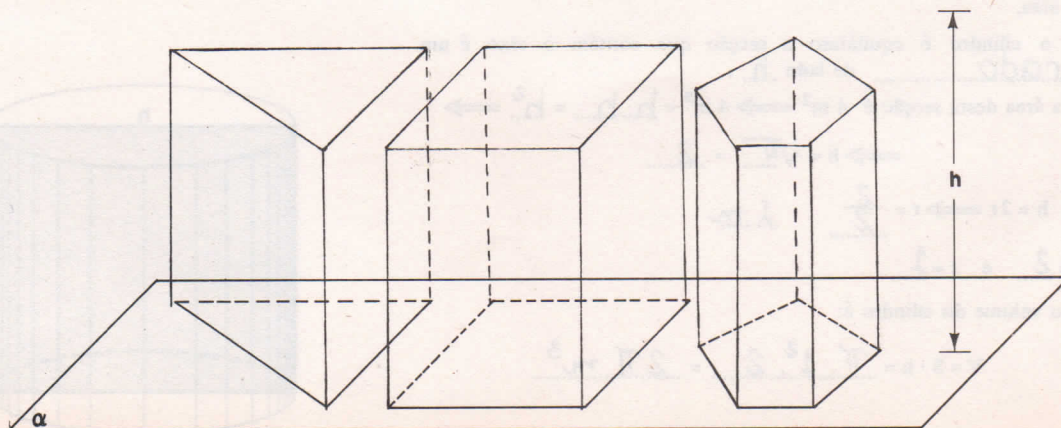
3. Temos então, dois sólidos, $K_1$ e $K_2$, e um plano $\alpha$. Podemos concluir que:

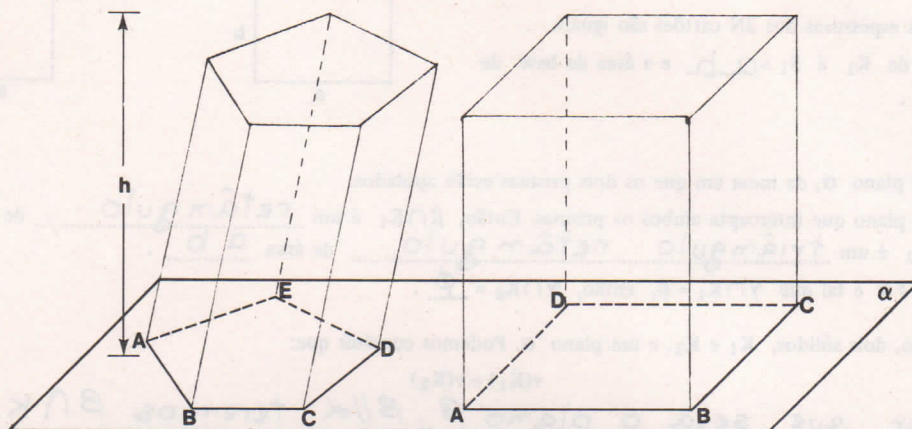
$$v(K_1) = v(K_2)$$

porque qualquer que seja o plano $\beta$, $\beta /\!/ \alpha$, teremos $\beta \cap K_1$ e $\beta \cap K_2$ com mesma área.

# 67. CÁLCULO DE VOLUMES

## 67.1. O VOLUME DOS CILINDROS

Considere um cilindro qualquer, cuja base tenha área igual a um número S dado e cuja altura seja um número h dado.

Este cilindro pode ser de vários tipos: prismas, cilindros circulares, etc. . . Desenhe três cilindros diferentes com tais características, por exemplo, de bases triangular, quadrangular e pentagonal.

Considere agora um qualquer desses cilindros, $K_1$, (por exemplo, um prisma oblíquo cuja base é um pentágono) e seja $\alpha$ o plano que contém sua base. Seja $K_2$ o paralelepípedo retângulo que tem essas mesmas características, com base no plano $\alpha$ e no mesmo semi-espaço que contém $K_1$.

Complete a figura:

As bases desses prismas são polígonos de áreas $S_1$ = ....S.. e $S_2$ = ....S.. respectivamente.

Considere um plano $\beta /\!/ \alpha$ à distância $k \leqslant h$ de $\alpha$, no mesmo semi-espaço que contém ambos os prismas.

$\beta \cap K_1$ é um ....pentágono.... congruente a ....ABCDE.... .

$\beta \cap K_2$ é um ....retângulo.... congruente a ....ABCD.... .

A área de $\beta \cap K_1$ é ....S.... A área de $\beta \cap K_2$ é ....S.

Se $\beta /\!/ \alpha$ está no semi-espaço oposto ou se $\beta$ está a uma distância $k > h$, do plano $\alpha$,

$\beta \cap K_1$ = ....∅.... $\beta \cap K_2$ = ....∅..

O volume do paralelepípedo retângulo é: $v(K_2)$ = ....S.h....

Pelo princípio de Cavalière, $v(K_2)$ ....=.... $v(K_1)$. Logo, $v(K_1)$ = ....S.h....

> *O volume de um cilindro de área da base* **S** *e altura* **h** *é dado por:*
>
> V = ....S.h....

## 67.2. FAÇA VOCÊ — TAREFA 65

Calcule o volume do cilindro equilátero cuja secção que contém o eixo tem 4 $m^2$ de área.

Como o cilindro é equilátero a secção que contém o eixo é um ....quadrado.... de lado ..h.. .

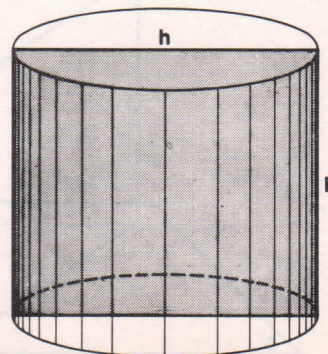
Como a área desta secção é 4 $m^2$ $\Longrightarrow$ 4 $m^2$ = ..h.h.. = ..$h^2$.. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow h = \sqrt{4}$ = ..2..

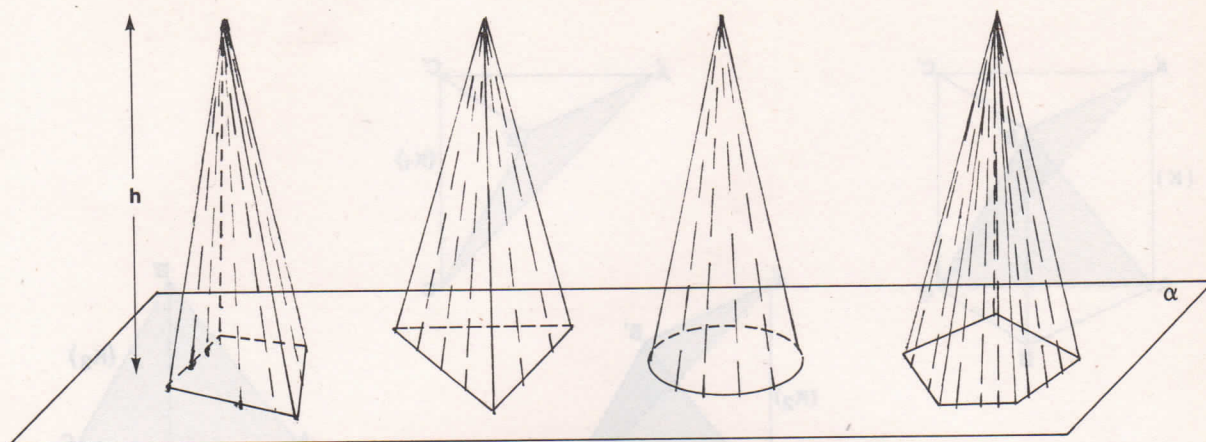
Ainda, $h = 2r \Longrightarrow r = \frac{2}{2}$ ....1 m....

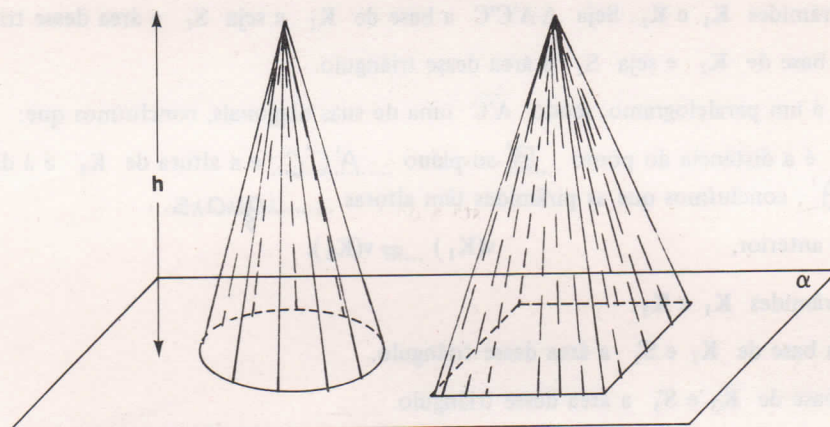
Se h = ..2.. e r = ..1..

Então o volume do cilindro é:

V = S · h = ....π . $1^2$ . 2.... = ....2π $m^3$....

## 67.3. CONES EQUIVALENTES

Considere cones cujas bases têm áreas S, dada, e cuja altura é um número h, dado.

Desenhe quatro cones diferentes com tais características: (pirâmides, cones circulares, etc. . . .).

Considere agora dois desses cones, $K_1$ e $K_2$, tais que suas bases estejam contidas em um plano $\alpha$ e ambos estejam no mesmo semi-espaço em relação a $\alpha$.

Complete a figura:

Se $\beta /\!/ \alpha$ é um plano no semi-espaço oposto ou se $\beta$ está a uma distância $k > h$ do plano $\alpha$.

$$\beta \cap K_1 = \emptyset \qquad \beta \cap K_2 = \emptyset$$

Seja $\gamma /\!/ \alpha$ um plano que está no semi-espaço que contém ambos os cones e a uma distância $k \leqslant h$, do plano $\alpha$. $\gamma \cap K_1$ é uma figura geométrica cuja área chamaremos $s_1$. A relação existente entre a área S, da base do cone $K_1$ e $s_1$ é: (ver ítem 67.2).

$$\frac{S}{S_1} = \frac{h^2}{k^2}$$

$\gamma \cap K_2$ é uma figura geométrica de área $s_2$. A relação existente entre $s_2$ e a área S, da base do cone $K_2$, é:

$$\frac{S}{S_2} = \frac{h^2}{k^2}$$

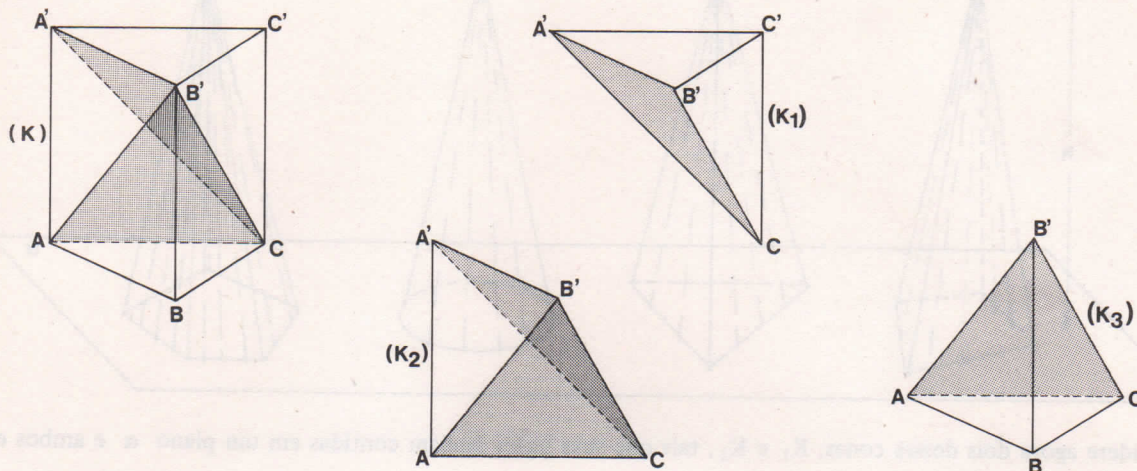
Logo, $\frac{s_1}{S} = \frac{s_2}{S} \Longrightarrow s_1 = s_2$

Aplicando o princípio de Cavalière, concluímos que: $v(K_1) = v(K_2)$.

*Dois cones de mesma altura e áreas das bases iguais têm o mesmo volume.*

## 67.4. VOLUME DE UMA PIRÂMIDE TRIANGULAR

Considere um prisma triangular **K**, com área da base **S** e altura **h**.

Podemos cortar este prisma de maneira a obtermos três pirâmides triangulares, $K_1$, $K_2$, $K_3$, do seguinte modo:

a) Consideremos as pirâmides $K_1$ e $K_2$. Seja $\triangle A'C'C$ a base de $K_1$ e seja $S_1$ a área desse triângulo.

Seja $\triangle ACA'$ a base de $K_2$ e seja $S_2$ a área desse triângulo.

Como ACC'A' é um paralelogramo, sendo $\overline{A'C}$ uma de suas diagonais, concluímos que: $S_1$ ...=... $S_2$.

A altura de $K_1$ é a distância do ponto ...B'... ao plano ...A'C'C... e a altura de $K_2$ é a distância do ponto ...B' ao plano ...ACA'..., concluímos que as pirâmides têm alturas ...iguais... .

Logo, pelo ítem anterior, $v(K_1)$ ...=... $v(K_2)$.

b) Consideremos as pirâmides $K_1$ e $K_3$.

Seja $\triangle A'B'C'$ a base de $K_1$ e $S'_1$ a área desse triângulo.

Seja $\triangle ABC$ a base de $K_3$ e $S'_3$ a área desse triângulo.

Sabemos que $S'_1 = S'_3$ porque os triângulos considerados são ...bases... de um ...prisma.

A altura de $K_1$ é a distância do ponto ...C... ao plano ...A'B'C'...

A altura de $K_3$ é a distância do ponto ...B'... ao plano ...ABC... .

As alturas de $K_1$ e $K_3$ são iguais porque ambas são a distância entre os planos paralelos ...A'B'C'... e ...ABC... .

Logo, pelo ítem 67.3.: $v(K_1)$ ...= v(K3)

c) Os ítens a) e b) nos permitem concluir que todo prisma triangular pode ser decomposto em ...três pirâmides ...triangulares... de igual ...volume... .

d) Como $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$, temos: $v(K) =$ ...v(K1)+ ...v(K2)+ ...v(K3)

Por outro lado, como num prisma de altura **h** e área da base **S**: $v(K) = S \cdot h$.

Logo, $v(K_1) = v(K_2) = v(K_3) =$ ...$\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$...

e) A pirâmide $K_3$ tem altura ...h... e área da base ...S... e, seu volume é: $v(K_3) =$ ...$\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$...

Logo, concluímos que toda pirâmide triangular de altura **h** e área da base **S** tem volume: $v =$ ...$\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$...

## 67.5. VOLUME DE UM CONE

Considere um cone qualquer K de altura h e área da base S. Seja K' uma pirâmide triangular com as mesmas características, cuja base está contida no mesmo plano $\alpha$ da base de K e, no mesmo semi-espaço em relação a $\alpha$.

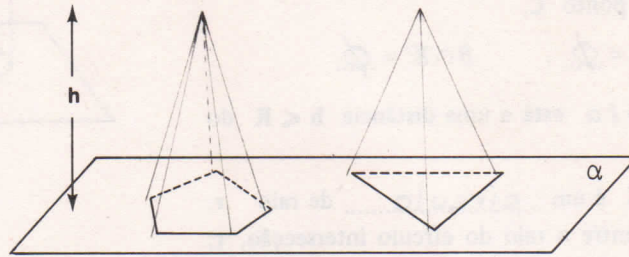
Complete a figura (As áreas das bases são iguais e as alturas também)

Pelo ítem 67.3, temos:

v(K) = v(K')

e pelo ítem anterior

$v(K') = \frac{1}{3} S \cdot h$

Logo, $v(K) = \frac{1}{3} S \cdot h$

> *O volume de um cone de altura* h *e área da base* S *é:*
>
> $v = \frac{1}{3} S \cdot h$

## 67.6. FAÇA VOCÊ – TAREFA 66

1. Calcule o volume de um cone de 8 m de altura e 10,5 m de raio.

O volume de um cone de altura h e área da base S é: $v = \frac{1}{3} S \cdot h$

A área da base $S = \pi r^2 \Longrightarrow S = 346{,}185 \text{ m}^2$.

Como h = 8 m, temos que: $v = \frac{1}{3} 8 \cdot 346{,}185 \Longrightarrow v = 923{,}16 \text{ m}^3$

2. Determine o volume do tetraedro regular de aresta $\ell$.

Seja ABCD o tetraedro regular e $\overline{AH}$, a altura.

A área S da base é dada por:

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

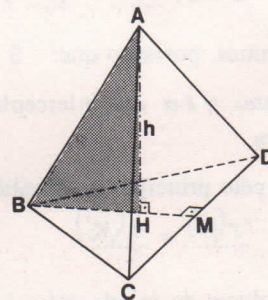
Para se determinar a altura h em função de $\ell$ tomamos o $\triangle ABH$, onde $BH = \frac{2}{3} BM$, pois H é o baricentro (ou ortocentro do $\triangle BCD$).

Como $BM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ (altura do $\triangle$ equilátero em função do lado)

vem $BH = \frac{2}{3} \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \ell \frac{\sqrt{3}}{3}$

No $\triangle ABH$, temos que: $(AH)^2 = (AB)^2 - (BH)^2$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{3\ell^2}{9} = \frac{2\ell^2}{3} \quad \text{ou} \quad h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$$

Como $v = \frac{1}{3} S \cdot h \Longrightarrow v = \frac{1}{3} \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \Longrightarrow$ $\boxed{v = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}}$

## 67.7. VOLUME DA ESFERA

**67.7.1.** Considere uma esfera K, de centro C e raio R, apoiada em um plano $\alpha$. Considere também, um cilindro equilátero de raio R e cuja base está contida em $\alpha$, no mesmo semi-espaço em relação a $\alpha$ que contem a esfera.

Complete a figura:

Desenhe a anticlepsidra K' do cilindro equilátero, isto é, a parte do cilindro que ...não pertence a clepsidra.........

Se um plano $\beta /\!/ \alpha$ está a uma distância $h > R$ do ponto C,

$\beta \cap K = \emptyset$ , $\beta \cap K' = \emptyset$.

Se $\gamma /\!/ \alpha$ está a uma distância $h \leqslant R$ do ponto C,

$\gamma \cap K$ é um ...círculo....... de raio r.

A relação entre o raio do círculo intersecção, r, e o raio da esfera, R, pode ser encontrada através do teorema de Pitágoras:

$$r^2 = R^2 - h^2$$

Logo, a área de $\gamma \cap K$ é:

$$S = \pi(R^2 - h^2)$$

$\gamma \cap K'$ é uma coroa circular de raios R e r'. Observe que r' e h são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Este triângulo é isósceles porque é semelhante ao triângulo MAB.

Logo, $r' = h$

Então a área de $\gamma \cap K'$ é:

$$S' = \pi R^2 - \pi (r')^2$$

$$S' = \pi(R^2 - r'^2)$$

Observamos, portanto que: $S = S'$.

para todo plano $\gamma /\!/ \alpha$ que intercepta a esfera e a anticlepsidra.

Assim, pelo princípio de Cavalière,

$$v(K) = v(K')$$

**67.7.2.** O volume da anticlepsidra é o volume do cilindro equilátero menos o volume da clepsidra.

Temos:

volume do cilindro: $\pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

volume da clepsidra: $2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3} \pi R^3$

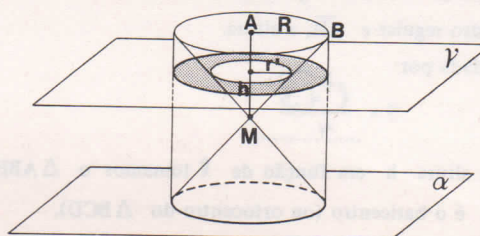
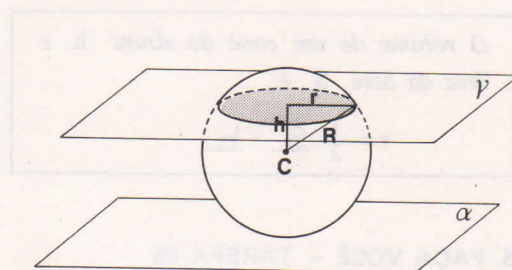
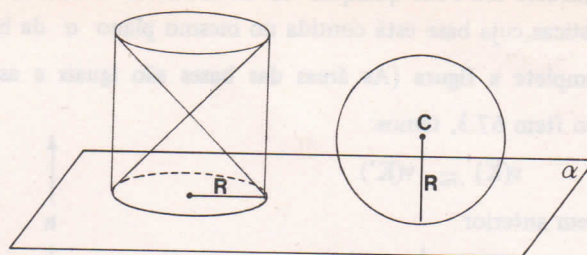
Logo, o volume da esfera é: $v(K) = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$

$$v(K) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

## 67.8. FAÇA VOCÊ – TAREFA 67

1. Determinar o volume de uma esfera cujo diâmetro mede 6 cm.

O volume da esfera é $v = \frac{4}{3} \pi R^3$

O diâmetro $D = 6\,cm \Longrightarrow R = 3\,cm$ portanto $v = \frac{4}{3}\pi 3^3 \Longrightarrow v = 36\pi$

2. Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio 2 m. Calcule o excesso de volume da esfera sobre o volume do cone.

Como O é o baricentro do $\Delta ABC$ e $AO = R =$ 2 m, temos que
$OH =$ 1 m

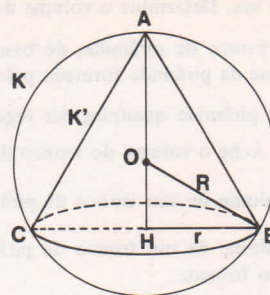
No $\Delta OBH$, temos que:

$(BH)^2 = (OB)^2 - (HO)^2 \Longrightarrow r^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ ou $r = \sqrt{3}$

No cone a área da base $S = \pi R^2 = 3\pi$ e a altura $h = 3$ m,
portanto o volume do cone será:

$v(K') = \frac{1}{3}$ $S.h = 3\pi$

O volume da esfera é: $v(K) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$

$v(K) - v(K') = \frac{32}{3}\pi - 3\pi = \boxed{\frac{23}{3}\pi}$

## 68. EXERCÍCIOS DE REVISÃO

### Sequência 1

1. O volume de um prisma de 6 cm de altura; e cuja base é um triângulo equilátero, é 500 $cm^3$. Calcule a aresta da base.

2. Um prisma hexagonal regular tem 36 $cm^3$ de volume e 48 $cm^2$ de área lateral. Calcule a altura e a aresta da base.

3. São dados um prisma quadrangular regular e um prisma triangular regular de mesma altura e, ambos, com aresta da base de 3 m. De quanto se deve aumentar a altura do segundo para se ter um prisma equivalente ao primeiro?

4. Um prisma triangular regular tem altura igual a $\sqrt{3}$ dm. Calcule o volume, sabendo que este é expresso pelo mesmo número que a área lateral do prisma.

5. Determine a área total de um prisma triangular regular cujo volume é $4\sqrt{3}$ $cm^3$, sendo a altura $\frac{2}{3}$ do perímetro da base.

6. Um cubo de aresta a é tal que o quadrado da diagonal, a área total e seu volume são termos consecutivos de uma sequência geométrica. Determine o valor de a.

7. Em um prisma triangular oblíquo, a aresta lateral tem inclinação de 60º em relação ao plano da base. O triângulo da base é equilátero e seu lado tem a mesma medida da aresta lateral, 3 m. Calcule o volume do prisma.

8. Em um cilindro de revolução de 157 $m^3$ de volume, a altura é o dobro do diâmetro. Calcule a área lateral.

9. O volume de um cilindro é 144 $cm^3$. Se, conservando-se a altura, aumentar-se o raio de 1,5 cm, o volume aumenta de 112 $cm^3$. Calcule a área lateral do primeiro cilindro.

10. Dois cilindros têm, ambos, 1 m de raio, e o menor, 2,5 m de altura. A diferença entre suas áreas laterais é 1,57 $m^2$. Calcule a diferença entre os volumes.

11. Em um cilindro equilátero está inscrito um prisma hexagonal regular. Determine a razão entre a área total do cilindro e a área total do prisma.

12. Um cilindro de revolução de 10 cm de raio da base foi cortado por um plano paralelo ao seu eixo e distante 6 cm dele. Sabendo-se que a área da secção feita por este plano, é de 80 $cm^2$, pede-se:

a) a altura do cilindro
b) o volume
c) a área total.

13. Dado um retângulo de lados de medidas a e b, considera-se o cilindro gerado pela rotação do retângulo em torno do lado que mede a, e o cilindro gerado pelo mesmo retângulo, quando gira em torno do lado que mede b. Determine a razão entre os volumes e a razão entre as áreas totais dos 2 cilindros.

### Sequência 2

1. Numa pirâmide hexagonal regular, a área lateral é 10 vezes a área da base, cujo lado mede 3 m. Calcule o volume.

2. Numa pirâmide hexagonal regular de 4 m de altura, a secção paralela à base, feita a 1,5 m do vértice, tem 1 $m^2$ de área. Calcule o volume da pirâmide.

3. Calcule a aresta do tetraedro regular cujo volume é $18\sqrt{3}$ $m^3$.

4. Determine a medida da aresta do octaedro regular cujo volume é 471 $cm^3$.

5. Um tetraedro regular SABC, de aresta igual a 4 m, é cortado por um plano que passa pelo vértice A e pelos pontos D e E, situados respectivamente sobre as arestas $\overline{SB}$ e $\overline{SC}$. Sabendo-se que $SD = SE = \frac{1}{4}$ SC, calcule o volume da pirâmide ASDE.

6. Uma pirâmide quadrangular regular tem volume igual a 64 $m^3$ e o lado da base tem 8 m. Calcule a distância do centro da base a uma das faces laterais.

7. Um tronco de pirâmide hexagonal regular tem as arestas das bases de 4 cm e de 2 cm, respectivamente. A aresta lateral do tronco mede 5 cm. Determine o volume do tronco.

8. Um tronco de pirâmide, de bases quadradas, tem volume de 14 $m^3$. Sabendo-se que os lados das bases medem 1 m e 2 m, calcule o volume da pirâmide formada pelo prolongamento das faces laterais e a pequena base.

9. Uma pirâmide quadrangular regular com 224 cm de altura foi seccionada por um plano paralelo à base e distante do vértice $\frac{3}{4}$ da altura. Ache o volume do tronco de pirâmide resultante, sabendo que o perímetro da secção é 180 cm.

10. O volume de um tronco de pirâmide de 8,27 m de altura é 140 $m^3$. Uma das bases tem 20 $m^2$. Calcule a área da outra base.

11. O volume de um tronco de pirâmide regular é 41,54 $cm^3$. As bases são quadrados de 3,1 cm e de 2,2 cm de lado. Calcule a aresta lateral do tronco.

12. O volume de um tronco de pirâmide regular é 64 $cm^3$ e as bases são triângulos equiláteros de 5 cm e de 7 cm de lado. Calcule a altura do tronco.

13. As arestas laterais de um tronco de pirâmide regular medem 1 m e as bases são quadrados cujas diagonais medem 1,6 m e 2,8 m. Calcule o volume do tronco.

14. Calcule o volume de um cone de 8 m de altura e 10,5 m de raio.

15. Calcule o volume do cone, gerado pela rotação de um triângulo retângulo de catetos 6 m e 8 m, em torno do cateto maior.

16. Calcule o volume do cone equilátero cuja área lateral é 9 $m^2$.

17. Um triângulo retângulo é isósceles, ao girar em torno de um dos catetos, gera um sólido cujo volume é $\frac{\pi}{3}$ $m^3$. Calcule a medida da hipotenusa do triângulo.

18. Num cone de revolução de 10 m de altura, a área da base excede de 216 $m^2$ a área de uma secção paralela à base, feita a 2 m do vértice. Calcule o volume do cone.

19. Um quadrado de lado $a$ gira em torno de um eixo que passa por um de seus vértices e é paralelo à diagonal do quadrado, que não passa por esse vértice. Calcular o volume do sólido gerado.

20. A base de um cone de revolução está inscrita na base de um prisma quadrangular regular e seu vértice coincide com o centro da outra base do prisma. A área lateral do prisma é $\frac{3}{2}$ da área de sua base e a altura é de 12 dm. Calcule o volume e a área lateral do cone.

## Sequência 3

1. A intersecção de um plano com uma esfera é um círculo de 14 $dm^2$ de área. Sabendo-se que o plano dista 2 dm do centro da esfera, determine a área e o volume desta.

2. O volume de uma esfera é $288\pi$ $m^3$. Calcule a área da esfera.

3. Calcule a área e o volume de uma esfera inscrita em um cubo de 216 $m^2$ de área total.

4. Determine a área da esfera circunscrita a um tetraedro de aresta $a$.

5. Dada uma esfera de raio $R$, circunscreveu-se a ela um cone equilátero e um cilindro equilátero. Determine as seguintes razões:
a) Entre o volume do cone e o da esfera;
b) Entre o volume do cone e o do cilindro;
c) Entre o volume da esfera e o do cilindro.

6. Um cubo, inscrito numa esfera, tem área total $S$. Exprima a área da esfera em função de $S$.

7. Um copinho de sorvete é um cone de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro na base e tem, colocadas, 2 colheradas esféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro.
a) Se o sorvete derreter no cone, haverá transbordamento?
b) Quanto sobra ou quanto falta de sorvete?

8. Um prisma quadrangular regular está inscrito em uma esfera de raio $R$. Sabendo-se que a aresta lateral do prisma é igual ao dobro da aresta de sua base, calcule a área total do prisma em função de $R$.

9. Num cone equilátero está inscrita uma esfera e nesta esfera, um cone equilátero. Demonstre que a área total do cone menor é igual a quarta parte da área total do cone maior.

10. Dada uma esfera de 20 cm de raio e um ponto $P$ a 40 cm do centro da esfera, considera-se o cone de vértice $P$, cujas geratrizes tangenciam a esfera e cuja base é o círculo determinado na esfera. Pede-se o volume da parte do cone que não está contida na esfera.

11. Calcule o volume do sólido compreendido entre o cone de revolução de 8 cm de altura e 6 cm de raio, e a superfície da esfera inscrita.

# RESPOSTAS

## CAPÍTULO 1
## O PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

**Sequência 1**

Demonstrações

## CAPÍTULO 2
## SEQUÊNCIAS
## AS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

**Sequência 1**

1.a) $I = \{7, 9, 11, 13, \ldots\}$
b) $I = \{-2, -7, -22, \ldots\}$
c) $I = \{3, 2, 5, 4, 7, \ldots\}$
d) $I = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
e) $I = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\}$
f) $I = \{-1, 1, 1, -1, 1, \ldots\}$
g) $I = \{-1, 1, 1, 1, \ldots\}$
h) $I = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots\}$

2.a) $a_7 = 10$ b) $a_7 = 64$ c) $a_7 = \frac{57}{8}$ d) $a_7 = \frac{1}{128}$ e) $a_7 = -1$
f) $a_7 = 18$ g) $a_7 = \frac{1}{7}$

3.a) $I = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$
b) $I = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots\}$
c) $I = \{-1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \ldots\}$
d) $I = \{2, 2, \frac{32}{15}, \frac{9}{4}, \ldots\}$
e) $I = \{1, \frac{5}{2}, 4, \frac{11}{2}, 7, \ldots\}$
f) $I = \{2, 10, 10, 18, 18, \ldots\}$
g) $I = \{\frac{3}{5}, \frac{5}{10}, \frac{7}{15}, \frac{9}{20}, \ldots\}$

**Sequência 2**

1.a) $a_{19} = 128$ b) $a_{100} = -148$ c) $a_{42} = -\frac{27}{2}$
d) $a_{17} = -30$ e) $a_{30} = 144$

2.a) $n = 16$ b) $n = 22$ c) $n = 37$ d) $n = 12$ e) $n = 24$

3.a) $r = 3$ b) $r = 7$ c) $r = 1{,}2$ d) $r = 0{,}1$

4.a) $a_1 = 8$ b) $a_1 = 1{,}8$ c) $a_1 = 56$ d) $a_1 = -2$

5.a) $S_{21} = 420$ b) $S_{32} = 288$ c) $S_{100} = 250{,}5$ d) $S_n = \frac{1}{2}(2a + n - 1)n$

6.a) $r = 2$ b) $r = 0{,}5$ c) $r = 0{,}1$

**Sequência 3**

1. $a_1 = 5$ e $a_7 = 23$
2. $a_1 = 17$, $r = -2$ e $a_{10} = -1$ (1º termo negativo)
3. $a_{12} - a_7 = 60$
4. 128
5. $a_1 = 3$, $r = 4$, $(3, 7, 15, 19, 23, \ldots)$
6. $(-2, 1, 4, 7, 10, \ldots)$
7. $r = 2$, $a_1 = 13$ e $S_{10} = 220$
8. 7500
9. $(7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, \ldots)$
10. $a_1 = 33$ e $S_{16} = -72$

**Sequência 4**

1.a) $a_8 = 3 \cdot (\frac{-2}{3})^7$ b) $a_7 = 10 \cdot (\frac{5}{2})^6$ c) $a_{11} = \frac{2}{5} \cdot (-2)^{10}$
d) $a_{15} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{14}$ e) $a_{10} = 2 \cdot (3)^9$

2.a) $n = 9$ b) $n = 6$ c) $n = 10$

3.a) $a_1 = 16$ b) $a_1 = \frac{3}{4}$ c) $a_1 = 81$

4.a) $S_{17} = -\frac{1}{3} \cdot [(-2)^{17} - 1]$ b) $S_{50} = 16 \cdot [(-\frac{1}{2})^{50} - 1]$ c) $S_{15} = 3(2^{15} - 1)$

5.a) $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{6}{11}$ b) $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{3}$ c) $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{81}{2}$

6.a) $1\frac{4}{900}$ b) $\frac{1}{99}$ c) $3\frac{2}{9}$

**Sequência 5**

1. $q = 3$, $a_2 = \frac{2}{3}$ ou $q = -3$, $a_2 = \frac{2}{3}$.
2. $a_7 = \pm \frac{81}{16}$
3. $(8, 20, 50, 125)$ ou $(-\frac{56}{3}, \frac{140}{3}, -\frac{350}{3}, \frac{875}{3})$
4. $a_1 = -3$ e $q = -2$
5. $q = 2$, $a_1 = \frac{5}{2}$, $S_6 = \frac{315}{2}$
6. $n = 8$
7. $(5; 5 \cdot \frac{32}{43}; 5 \cdot (\frac{32}{43})^2; \ldots)$ ou $(5; 5 \cdot (\frac{105}{131}); 5 \cdot (\frac{105}{131})^2; \ldots)$
8. $r = \frac{2}{3}$
9. $a_1 = 2$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{4}$
10. $q = \frac{3}{5} \longrightarrow (40, 24, \frac{72}{5}, \ldots)$; $q = \frac{2}{5} \longrightarrow (60, 24, \frac{48}{5}, \ldots)$

## CAPÍTULO 3
## O BINÔMIO DE NEWTON

**Sequência 1**

1.a) $32x^5 + 80ax^4 + 80a^2x^3 + 40a^3x^2 + 10a^4x + a^5$
b) $64x^6 - 78x^5 + 60x^4 - 20x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{64}$
c) $1 - 7a + 21a^2 - 35a^3 + 35a^4 - 21a^5 + 7a^6 - a^7$
d) $\frac{32}{243}x^{10} - \frac{40}{27}x^9 + \frac{20}{3}x^8 - 15x^7 + \frac{136}{8}x^6 - \frac{243}{32}x^5$

2.a) $-\binom{10}{7}x^3$ b) $-144x^{11}$

3.a) não tem b) não tem c) não tem d) não tem

**Sequência 2**

1. par $\longrightarrow$ 1 termo médio.
ímpar $\longrightarrow$ 2 termos médios.

2. $S = \frac{n(2n + 1)(n + 1)}{6}$

3.a) $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6$
b) $\binom{7}{0} - \binom{7}{1} + \binom{7}{2} - \binom{7}{3} + \binom{7}{4} - \binom{7}{5} + \binom{7}{6} - \binom{7}{7} = 0$

4.a) $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ e $\binom{n}{\frac{n+2}{2}}$ b) $\binom{n}{\frac{n}{2}}$

5.a) $\binom{8}{4}(x^2)^4(-3x)^4$ b) $\binom{7}{3}a^4(-2b)^3$ e $\binom{7}{4}a^3(-2b)^4$

6.a) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$
b) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$
c) $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x + abc$
d) $x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd$

7. $A = 1$ $B = a + b + c + \ldots + m + n$ $C = ab + ac + \ldots + mn$
soma dos produtos dos elementos de todas as combinações 2 a 2 do conjunto $\{a, b, \ldots, n\}$.
M = soma dos produtos dos elementos de todas as combinações $n - 1$ a $n - 1$ do conjunto $\{a, b, \ldots, m, n\}$.
$N = abc \ldots mn$.

## CAPÍTULO 4
## ANÁLISE COMBINATÓRIA

**Sequência 1**

1. 201600
2. a) 36 , b) 36
3. 960
4. 1440
5. a) 6  b) 15  c) 20
6. 1260
7. 840
8. 27720
9. $20 \cdot 15 \cdot C_{43,3} = 20 \times 15 \times 12341$
10. a) 34650  b) 16632  c) 924  d) 27720

**Sequência 2**

1. $C_{9,2} = 36$
2. $\begin{cases} C_{20,2} - 20 = 170 \\ C_{n,2} - n \end{cases}$
3. 36 e 100
4. 8
5. 2598960
6. a) 60  b) 10
7. 252
8. 2300
9. $30 \times 29 \times 28 \times 2675$
10. 720
11. 15120
12. a) 720  b) 180
13. 56
14. 441
15. 104

**Sequência 3**

1. 182
2. $\dfrac{30!}{17!\,13!}$  $\dfrac{70!}{13!\,57!}$
3. $\dfrac{32!}{20!\,12!}$
4. $n = 3$
5. 8
6. 32
7. 5333280
8. 47
9. 220
10. 462
11. a) 720  b) 240  c) 48
12. $\begin{cases} 12! \\ 2 \times 6! \times 6! = 1036800 \end{cases}$

**Sequência 4**

1. 6
2. a) 14  b) 4  c) 33
3. a) 30  b) 10  c) 36
4. 9!
5. a) $\dfrac{45!}{5!\,40!}$  b) $9 \cdot \dfrac{45!}{5!\,40!}$
6. 3600
7. a) 17  b) 12
8. a) 120  b) 186
9. Demonstração
10. 7 ou 14
11. a) 7  b) $\dfrac{105}{512}$
12. $p = 2$ e $K = 17$
13. Identidade
14. Demonstração
15. $2(n!)^2$
16. $n = 6$

## CAPÍTULO 5
## TEORIA DAS PROBABILIDADES

**Sequência 1**

1. 2. 3. 4.

**Sequência 2**

1. $\dfrac{4}{13}$
2. a) $\dfrac{2}{5}$  b) $\dfrac{3}{5}$
3. a) $\dfrac{5}{9}$  b) $\dfrac{2}{9}$
4. a) $\dfrac{1}{3}$  b) $\dfrac{1}{2}$
5. $\dfrac{20}{30} \cdot \dfrac{19}{29} = \dfrac{38}{87}$
6. $\dfrac{1}{12}$
7. $\dfrac{4}{52} \cdot \dfrac{3}{51} = \dfrac{1}{221}$
8. $\dfrac{(n-r)!\,2 + r!\,r \cdot 2}{n!}$
9. $\dfrac{8!\,6 \cdot 4}{10!} = \dfrac{4}{15}$
10. $\dfrac{1}{5}$
11. $1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 336}{(365)^{30}} \cong 0{,}71$
12. $\dfrac{1}{52} \cdot \dfrac{1}{51} \cdot \dfrac{1}{50}$
13. a) $\dfrac{2}{25}$  b) $\dfrac{49}{50}$  c) $\dfrac{1}{25}$

## CAPÍTULO 6
## MATRIZES E DETERMINANTES

**Item 39**

**Sequência 1**

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3. É matriz linha ou matriz coluna, com p elementos, porque se p é primo ele só pode ser escrito na forma $p = p \times 1$, ou $p = 1 \times p$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

**Sequência 2**

1. $\begin{pmatrix} -21 & 20 \\ -20 & -21 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 7 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$
3. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 21 \end{pmatrix}$  b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$
4. $\sum_{j=1}^{3} C_{2j} = 6$
5. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$
6. ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
7. Demonstração
8. $3 \times 1$, $1 \times 2$, $2 \times 2$
9. a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  b) $\left(\frac{23}{8}, 2, \frac{-51}{8}\right)$  c) $\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$
10. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$
 c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

**Item 42**

**Sequência 1**

1. a) -3  b) 6  c) 192
2. a) -120  b) $x^2 - y^2$  c) 0  d) -37
3. a) 0  b) 3  c) 0  d) 0
4. Demonstração

**Sequência 2**

1. $\begin{pmatrix} \cos a & \text{sen } a \\ -\text{sen } a & \cos a \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \cos a & \text{sen } a \\ \text{sen } b & \cos b \end{pmatrix}$
3. Demonstração
4. a) $x = 10 \pm 4\sqrt{5}$  b) $x = 0$  $x = \frac{3}{8}$  c) $x = 5$
5. $m < \dfrac{209}{4}$
6. $\{1, 2, 3\}$
7. Demonstração

**Sequência 3**

1. $\nexists$
2. $A_{11} = -2$  $A_{12} = -1$  $A_{21} = 4$  $A_{22} = 1$
3. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**Item 44**

**Sequência 1**

1. a) $\nexists A^{-1}$  b) $\nexists A^{-1}$  c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  d) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\det A^{-1} = -\frac{1}{7}$

3. $\det A^{-1} = -\frac{1}{32}$

**Sequência 2**

1.a) $X \cdot A = B$

$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$

$X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}$

$X \cdot I = B \cdot A^{-1}$

$X = B \cdot A^{-1}$

b) $X \cdot (A + B) = I$

$[X \cdot (A + B)] \cdot (A + B)^{-1} = I \cdot (A + B)^{-1}$

$X \cdot [(A + B) \cdot (A + B)^{-1}] = (A + B)^{-1}$

$X \cdot I = (A + B)^{-1}$

$X = (A + B)^{-1}$

c) $A \cdot X + B = A$

$A \cdot X + B - B = A - B$

$A \cdot X = A - B$

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot (A - B)$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot (A - B)$

$X = A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot B$

$X = I - A^{-1} \cdot B$

d) $2A \cdot X = A$

$2(A \cdot X) = A$

$A \cdot X = \frac{1}{2} A$

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot (\frac{1}{2} A)$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = \frac{1}{2} (A^{-1} \cdot A)$

$I \cdot X = \frac{1}{2} I$

$X = \frac{1}{2}$

2.a) $\begin{pmatrix} -13 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$  b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{11}{7} \end{pmatrix}$  d) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

3.a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$  b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$  d) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$

4.a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 5y = -4 \end{cases}$  c) Demonstração

5.a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$  b) $x = -12; \quad y = 11$

6. eq. matricial $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

7.a) $x = 1; \quad y = 2$  b) $x = 1; \quad y = 0; \quad z = 2$

## CAPÍTULO 7
## SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

**Sequência 1**

1.a) $x = \frac{1}{5}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = 0$

b) $x = 4$; $y = 0$; $z = 5$

c) $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

d) $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

2.a) $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

b) $x = 4$; $y = -1$; $z = -2$; $w = 1$

c) $x = 7$; $y = -7$; $z = -2$; $w = -3$

d) $x = 5$; $y = 3$; $z = 1$; $w = 2$

3.a) $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$

b) $x = 1$; $y = 2$

c) $x = 3$; $y = 2$; $z = 1$

d) $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$

e) Sistema possível indeterminado.

**Sequência 2**

1.a) $x = 1 - z$; $y = t = z - 1$

b) $x = -4(2 - z)$; $y = 3z - 5$; $t = 10(2 - z)$

c) $x = 11$; $y = 5$; $z = 0$

d) Sistema impossível.

e) Sistema impossível.

2.a) $x = 6$; $y = -3$; $z = 0$

b) Sistema impossível.

c) Sistema indeterminado. $x = 6 - 5z$; $y = 4z - 3$ e $\forall z \in \mathbb{R}$

**Sequência 3**

1.a) $p \neq \{3, 14\}$  b) $p \neq \{1, 2\}$  c) $p \neq \{2, \frac{7}{5}\}$

2.a) Det $A = 0$ $\begin{cases} \text{indeterminado: } K = 9 \\ \text{impossível: } K \neq 9 \end{cases}$  b) Det $A \neq 0$: determinado $\forall K$

c) det.: $K \neq -1$
ind.: $\nexists K$
imp.: $K = -1$

d) det.: $K \neq \{1, -3\}$
ind.: $K = \{1, -3\}$
imp.: $\nexists K$

3.a) det.: $K \neq 11$
ind.: $K = 11, \quad p = 7$
imp.: $K = 11, \quad p \neq 7$

b) det.: $K \neq -\frac{3}{2}$

c) det.: $K \neq -\frac{3}{2}$
ind.: $K = -\frac{3}{2}, \quad p = \{3, \frac{443}{11}\}$
imp.: $K = -\frac{3}{2}, \quad p \neq \{3, \frac{443}{11}\}$

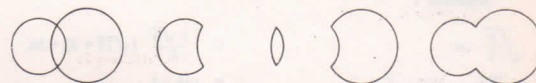
4.a) det.: $m \neq \pm 1$
ind.: $m = \pm 1; \quad p = 1$
imp.: $m = \pm 1; \quad p \neq 1$

b) det.: se $m \neq \{0, 1\}$
ind.: se $m = 0$
imp.: $\nexists m$

## CAPÍTULO 8
## GEOMETRIA
## PROPOSIÇÕES FUNDAMENTAIS

**Item 56**

**Sequência 1**

1. 4
2. Sim. Figura geométrica é qualquer conjunto de pontos. Pode ser convexa, porque os segmentos determinados por A, B, C, D podem estar todos contidos em F.
3. 

côncava
convexa
côncava
côncava

4. 
Só será convexa se eles forem coincidentes.

5. 3 planos; há 3 conjuntos de 3 retas, 2 a 2 concorrentes.
6. subconjunto de um plano.

**Sequência 2**

Demonstrações

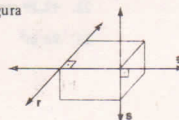
## PARALELISMO E PERPENDICULARISMO

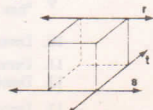
**Item 60**

**Sequência 1**

1.a) $a \cap b = \{A\}$  b) $\alpha \cap \beta = \{M\}$  c) $r \subset \alpha, \quad s \cap r = \{N\}$

2.a) $a /\!/ \alpha$  b) $a \subset \alpha$  c) $a \subset \alpha$ e $a \subset \beta$

3. Sim, pois pela figura

4. Não; por absurdo, $\exists\, a /\!/ r$ e $a /\!/ s \Longrightarrow r /\!/ s$.
Ao mesmo plano, sim. r e s estão em planos paralelos entre si, portanto podem ser paralelos a um terceiro plano.

5. 
$r /\!/ s, \quad s \subset \alpha$
$r \not\!/\!/ t, \quad t \subset \alpha$

6.a) a, b, r estão no mesmo plano

$$\begin{array}{l} r \perp a \Longrightarrow \exists | \alpha | r \subset \alpha \text{ e } a \subset \alpha \\ r \perp b \Longrightarrow \exists | \alpha' | r \subset \alpha' \text{ e } b \subset \alpha' \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} r \subset \alpha \cap \alpha' \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha' \\ a \not\parallel b \end{array}$$

$\Longrightarrow \alpha' \equiv \alpha'$ (pois se $\alpha$ e $\alpha'$ sao concorrentes $\Longrightarrow r \not\parallel a$ e $r \not\parallel b$) (absurdo).

b) a, b, r não estão no mesmo plano

$a \cap b = \{P\} \Longrightarrow \exists | \alpha | a \subset \alpha$ e $b \subset \alpha$

$r \perp a$, $r \perp b$ e $r \subset \alpha \Longrightarrow a \not\parallel b$ (absurdo)

7. e 8. Demonstrações

**Sequência 2**

Demonstrações

**Sequência 3**

1. 60º
2. Demonstração
3. A relação existente entre a secção normal de um diedro e o ângulo formado por 2 retas concorrentes é $\frac{1}{2}$.

**Sequência 4**

Demonstrações

**Sequência 5**

Demonstrações

**Sequência 6**

Demonstrações

**Sequência 7**

Demonstrações

**Sequência 8**

1. 30º
2. 108º
3. Demonstração

## SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

**Item 65**

**Sequência 1**

1. $\sqrt{\frac{P}{2}}$ cm
2. $5\sqrt{2}$ cm; 150 cm²
3. 3 cm, 5 cm, 7 cm
4. $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{12}$ ou $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$
5. $\frac{D^2}{2}(1 + 2\sqrt{2})$
6. $12\sqrt{3}\,R^2$; $\frac{R\sqrt{43}}{2}$
7. $\frac{3\sqrt{3}}{4}(\sqrt{13} + 3) + 36$
8. 120 m²
9. 1143 m²
10. 8490,56 cm²; 12735,84 cm²
11. 2 m
12. 5 m
13. 12,8 m²

**Sequência 2**

1. $\frac{\ell^2}{2}$
2. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm
3. $\frac{8a^2}{3\sqrt{3}}$
4. $\frac{2L}{3}$ cm; $\frac{L\sqrt{7}}{3}$ cm; $\frac{4L^2}{9}(2\sqrt{2} + 1)$ cm²
5. $\frac{2L\sqrt{3}}{3}$ cm; $\frac{L^2}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{39})$ cm²
6. $\frac{45}{2}$ cm²
7. $\frac{4}{3}$ m
8. 45º
9. 60º
10. $\frac{24}{5}$ m
11. $\frac{3a^2}{2}$
12. 256 cm²
13. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
14. 37,8 cm
15. 235,5 cm²
16. $\pi$ m
17. 288º
18. 10 m
19. $\frac{98}{3}\pi$ m²
20. $\sqrt{15}$ m
21. h = H
22. 42,39 cm²
23. $9\pi$ m²

**Sequência 3**

1. 21
2. 18
3. 6
4. 15

5.a) 18; 30
b) 12 triangulares; 6 quadrangulares

6. 6; 3
7. 6 triangulares; 7 quadrangulares

8.a) octaedro
b) 8 faces triangulares
c) 6; 12

9. $a_{\text{hex. reg.}} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot a_{\text{oct.}}$
10. Demonstração
11. Demonstração
12. Demonstração
13. Demonstração

**Sequência 4**

1. Se dois pontos A e B estão na superfície esférica, isto significa que esses pontos são equidistantes de um ponto (centro da esfera). Os pontos equidistantes de $\overline{AB}$ determinam um plano chamado plano mediador. Portanto, o centro da superfície esférica está no plano mediador de $\overline{AB}$.
2. Demonstração
3. Demonstração
4. $\frac{2}{5}$ R do plano
5. $3\sqrt{3}$ m
6. $4096\pi$ m²
7. $3 \cdot 10^4\,\pi$ m²
8. $8\pi(\sqrt{2} + 1)$ cm²; $8\pi(\sqrt{2} + 2)$ cm²
9. $16\pi$ cm²; $16\pi$ cm²

## VOLUMES

**Item 68**

**Sequência 1**

1. $a = \sqrt{\frac{1000}{\sqrt{3}}}$
2. $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $a = \sqrt{3}$
3. $h' = \frac{4h}{\sqrt{3}}$
4. V = 108 dm³
5. $S_t = 2(12 + \sqrt{3})$ cm²
6. a = 12
7. $V = \frac{81}{8}$ m³
8. $S_\ell = 135{,}9$ m³
9. $S_\ell = 448$ cm³
10. 1,57 m³
11. $\frac{2\pi}{4 + \sqrt{3}}$

12.a) 5 cm
b) $500\pi$ cm³
c) $300\pi$ cm²

13. $\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}$; $\frac{S_a}{S_b} = \frac{b(b + 2a)}{a(a + ab)}$

**Sequência 2**

1. $\frac{27 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{74}}{2}$
2. $V = \frac{256}{9}$ m³
3. $a = 18\sqrt[3]{12}$
4. $a = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{\frac{157}{2}}$
5. $V = \frac{7\sqrt{663}}{78}$
6. $\frac{12}{5}$
7. $V_{tronco} = 14\sqrt{63}$
8. 2 m³
9. 155400 cm³
10. 13,94 m³
11. 5,89 cm
12. $\frac{109}{240}\sqrt{3}$ cm
13. 1,04 m³
14. 923,16 m³
15. $96\pi$ m³
16. 3,105 m³
17. hip. = 1 m
18. 750 m³
19. $\pi a^3 \sqrt{2}$

20. $V_e = 1024\pi$ dm³
$S_{\ell_e} = 320\pi$ dm²

**Sequência 3**

1. S = 106,13
2. $S = 144\pi$ cm²
3. $S = 36\pi$ m², $V = 36\pi$ m²
4. $S = \frac{16}{9}\pi a^2$

5.a) $\frac{V_{cone}}{V_{esfera}} = \frac{9}{4}$ b) $\frac{V_{cone}}{V_{cilindro}} = \frac{3}{2}$ c) $\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{4}{6}$

6. $S_e = \frac{\pi}{12} \cdot S$
7. Haverá transbordamento; sobrará $36\pi$ cm³
8. $\frac{20R^2}{3}$
9. Demonstração
10. $\frac{16000}{3}\pi$ cm³
11. $V = 60\pi$ cm³

## TABELA DE SENOS, COSSENOS TANGENTES E COTANGENTES (graus)

| Graus | Senos | Cossenos | Tangente | Cotangente | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,000 0 | 1,000 0 | 0,000 0 | | 90 |
| 1 | 0,017 5 | 0,999 8 | 0,017 5 | 57,290 0 | 89 |
| 2 | 0,034 9 | 0,999 4 | 0,034 9 | 28,636 3 | 88 |
| 3 | 0,052 3 | 0,998 6 | 0,052 4 | 19,081 1 | 87 |
| 4 | 0,069 8 | 0,997 6 | 0,069 9 | 14,300 7 | 86 |
| 5 | 0,087 2 | 0,996 2 | 0,087 5 | 11,430 1 | 85 |
| 6 | 0,104 5 | 0,994 5 | 0,105 1 | 9,514 4 | 84 |
| 7 | 0,121 9 | 0,992 5 | 0.122 8 | 8,144 3 | 83 |
| 8 | 0,139 2 | 0,990 3 | 0,140 5 | 7,115 4 | 82 |
| 9 | 0,156 4 | 0,987 7 | 0,158 4 | 6,313 8 | 81 |
| 10 | 0,173 6 | 0,984 8 | 0,176 3 | 5,671 3 | 80 |
| 11 | 0,190 8 | 0,981 6 | 0,194 4 | 5,144 6 | 79 |
| 12 | 0,207 9 | 0,978 1 | 0,212 6 | 4,704 6 | 78 |
| 13 | 0,225 0 | 0,974 4 | 0,230 9 | 4,331 5 | 77 |
| 14 | 0,241 9 | 0,970 3 | 0,249 3 | 4,010 8 | 76 |
| 15 | 0,258 8 | 0,965 9 | 0,267 9 | 3,732 1 | 75 |
| 16 | 0,275 6 | 0,961 3 | 0,286 7 | 3,487 4 | 74 |
| 17 | 0,292 4 | 0,956 3 | 0,305 7 | 3,270 9 | 73 |
| 18 | 0,309 0 | 0,951 1 | 0,324 9 | 3,077 7 | 72 |
| 19 | 0,325 6 | 0,945 5 | 0,344 3 | 2,904 2 | 71 |
| 20 | 0,342 0 | 0,939 7 | 0,364 0 | 2,747 5 | 70 |
| 21 | 0,358 4 | 0,933 6 | 0,383 9 | 2,605 1 | 69 |
| 22 | 0,374 6 | 0,927 2 | 0,404 0 | 2,475 1 | 68 |
| 23 | 0,390 7 | 0,920 5 | 0,424 5 | 2,355 9 | 67 |
| 24 | 0,406 7 | 0,913 5 | 0,445 2 | 2,246 0 | 66 |
| 25 | 0,422 6 | 0,906 3 | 0,466 3 | 2,144 5 | 65 |
| 26 | 0,438 4 | 0,898 8 | 0,487 7 | 2,050 3 | 64 |
| 27 | 0,454 0 | 0,891 0 | 0,509 5 | 1,962 6 | 63 |
| 28 | 0,469 5 | 0,882 9 | 0,531 7 | 1,880 7 | 62 |
| 29 | 0,484 8 | 0,874 6 | 0,554 3 | 1,804 0 | 61 |
| 30 | 0,500 0 | 0,866 0 | 0,577 4 | 1,732 1 | 60 |
| 31 | 0,515 0 | 0,857 2 | 0,600 9 | 1,664 3 | 59 |
| 32 | 0,529 9 | 0,848 0 | 0,624 9 | 1,600 3 | 58 |
| 33 | 0,544 6 | 0,838 7 | 0,649 4 | 1,539 9 | 57 |
| 34 | 0,559 2 | 0,829 0 | 0,674 5 | 1,482 6 | 56 |
| 35 | 0,573 6 | 0,819 2 | 0,700 2 | 1,428 1 | 55 |
| 36 | 0,587 8 | 0,809 0 | 0,726 5 | 1,376 4 | 54 |
| 37 | 0,601 8 | 0,798 6 | 0,753 6 | 1,327 0 | 53 |
| 38 | 0,615 7 | 0,788 0 | 0,781 3 | 1,279 9 | 52 |
| 39 | 0,629 3 | 0,777 1 | 0,809 8 | 1,234 9 | 51 |
| 40 | 0,642 8 | 0,766 0 | 0,839 1 | 1,191 8 | 50 |
| 41 | 0,656 1 | 0,754 7 | 0,869 3 | 1,150 4 | 49 |
| 42 | 0,669 1 | 0,743 1 | 0,900 4 | 1,110 6 | 48 |
| 43 | 0,682 0 | 0,731 4 | 0,932 5 | 1,072 4 | 47 |
| 44 | 0,694 7 | 0,710 3 | 0,965 7 | 1,035 5 | 46 |
| 45 | 0,707 1 | 0,707 1 | 1,000 0 | 1,000 0 | 45 |
| | Cossenos | Senos | Cotangente | Tangente | Graus |